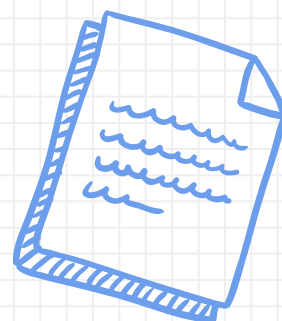


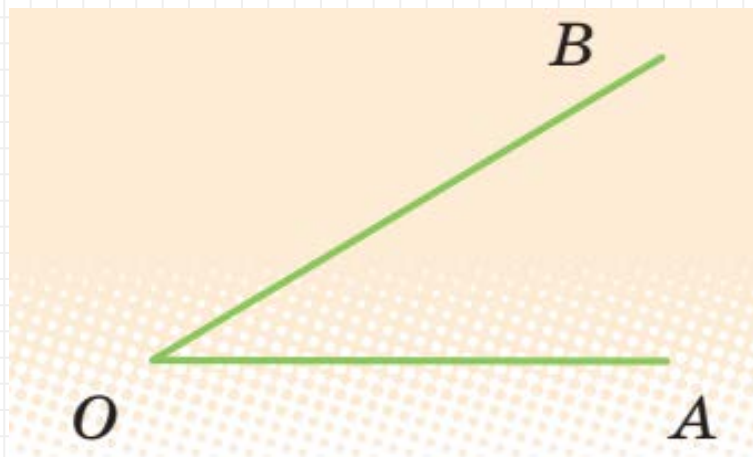
# ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ



Сформулюйте означення кута, утвореного в результаті повороту променя (кута повороту)

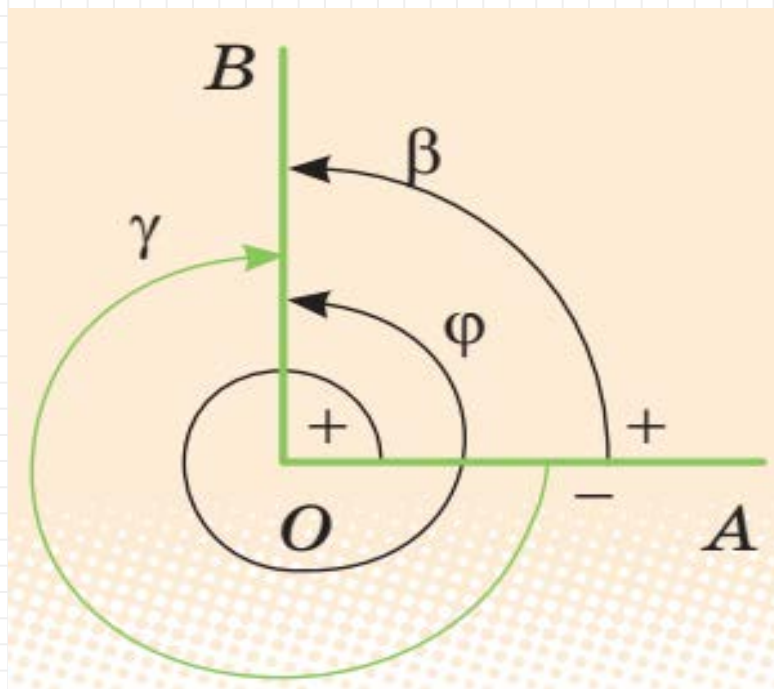


**Кут повороту** — фігура, утворена в результаті повороту променя на площині навколо початкової точки.

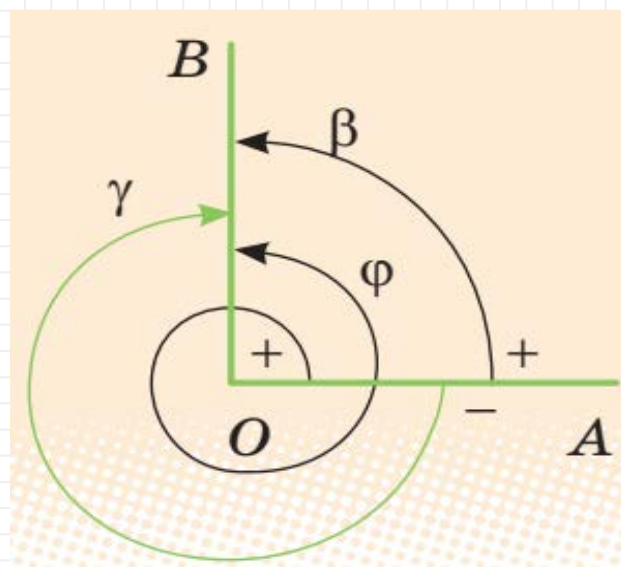


$\angle AOB$  утворений унаслідок повороту променя  $AO$  навколо точки  $O$ .




- Розкажіть, як вимірюють кути повороту.
- Укажіть величину кутів  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$ , зображених на рисунку.



Кожному куту як фігурі ставиться у відповідність **кут повороту**, за допомогою якого утворено цей кут (проти годинникової стрілки — додатний, за годинниковою стрілкою — від’ємний). Кут повороту  $\alpha \in (-\infty; +\infty)$ .

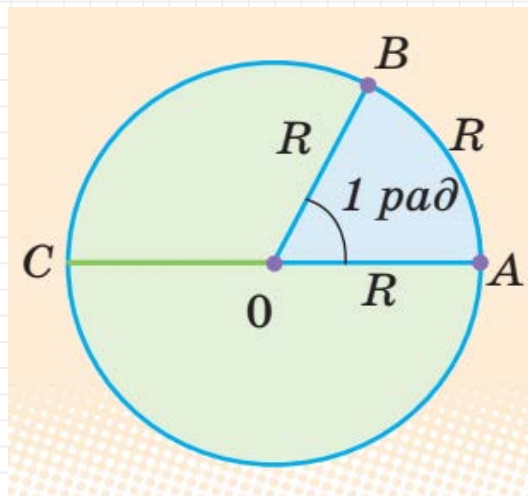


$$\angle AOB = \beta = 90^\circ, \angle AOB = \gamma = -270^\circ, \angle AOB = \varphi = 90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$$

-  - Що називають радіаном?
-  - Як виразити в градусній мірі кути, виміряні в радіанах?
-  - Як виразити в радіанній мірі кути, виміряні в градусах?





**1 радіан** — центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола.



$$1 \text{ радіан} = \frac{180}{\pi} = 57^\circ$$

$$1^\circ = \frac{180}{\pi} \text{ радіан}$$



-  - Що називається синусом кута в  $\alpha$  радіан (числа  $\alpha$ )?
-  - Що називається косинусом кута в  $\alpha$  радіан (числа  $\alpha$ )?



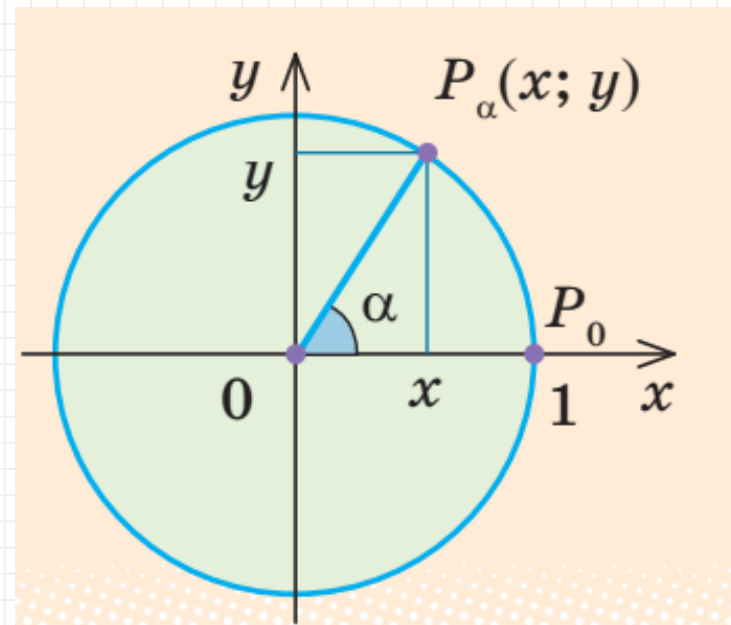




**Синусом кута** називається ордината точки  $P_\alpha(x; y)$  одиничного кола:

$$\sin \alpha = y$$

**Косинусом кута** називається абсциса точки  $P_\alpha(x; y)$  одиничного кола:

$$\cos \alpha = x$$



-  - Що називається синусом кута в  $\alpha$  радіан (числа  $\alpha$ )?
-  - Що називається косинусом кута в  $\alpha$  радіан (числа  $\alpha$ )?



**Тангенсом кута  $\alpha$**  називається відношення ординати точки  $P_\alpha(x; y)$  одиничного кола до її абсциси, тобто

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

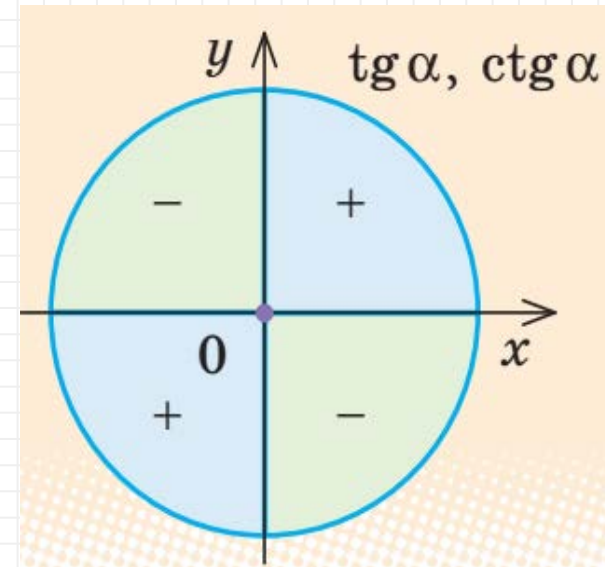
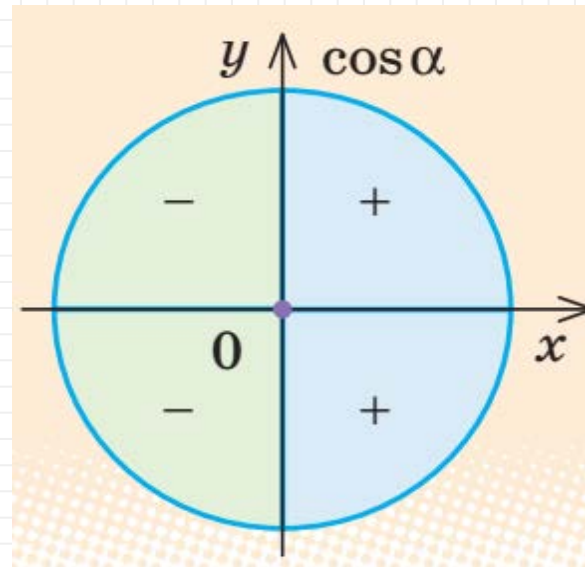
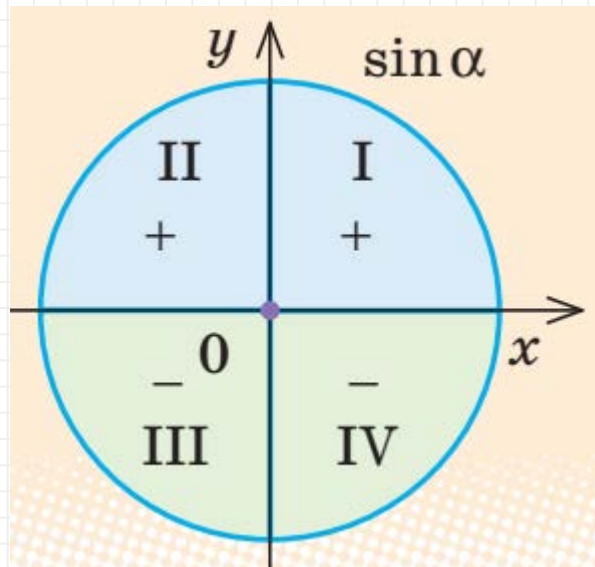
**Тангенсом кута  $\alpha$**  називається відношення ординати точки  $P_\alpha(x; y)$  одиничного кола до її абсциси, тобто

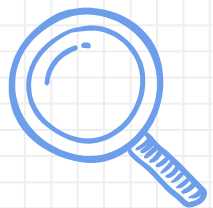
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Які знаки мають тригонометричні функції  
в кожній із координатних чвертей?



## Знаки тригонометричних функцій





Які властивості мають тригонометричні функції?



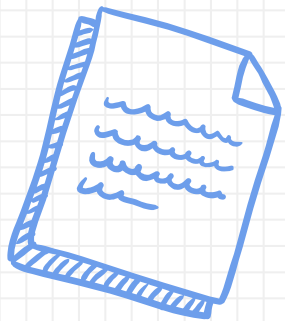
## Властивості функцій $y = \sin x, y = \cos x$

	Область визначення	Область значень	Парність, непарність	Періодичність
$y = \sin x$	$x \in \mathbf{R}$	$y \in [-1; 1]$	Непарна $\sin(-x) = -\sin x$	$T = 2\pi$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$y = \cos x$	$x \in \mathbf{R}$	$y \in [-1; 1]$	Парна $\cos(-x) = \cos x$	$T = 2\pi$ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$



## Властивості функцій $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$

	Область визначення	Область значень	Парність, непарність	Періодичність
$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ $k \in \mathbb{Z}$	$y \in \mathbb{R}$	Непарна $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	$T = \pi$
$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi k$ $k \in \mathbb{Z}$	$y \in \mathbb{R}$	Непарна $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$	$T = \pi$



Запишіть співвідношення між тригонометричними функціями  
одного аргумента



## Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргумента

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

– основна тригонометрична  
ТОТОЖНІСТЬ

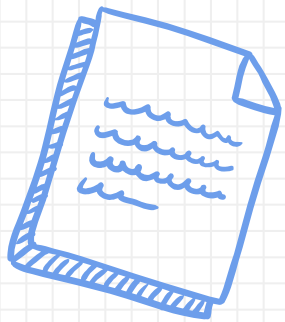
$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$



Запишіть формули додавання.



## Косинус різниці і суми

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

## Синус суми і різниці

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

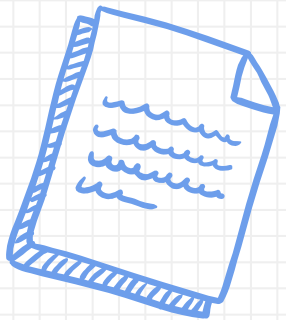
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

## Тангенс суми і різниці

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$





## Запишіть формули подвійного аргумента.



## Формули подвійного аргумента

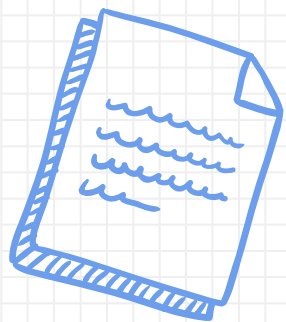
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$



Запишіть формули пониження степеня.



## Формули пониження степеня

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$



Що таке формули зведення?



**Формулами зведення** називають формули, за допомогою яких тригонометричні функції від аргументів виду  $k\pi \pm \alpha$  і  $(2k + 1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) зводять до тригонометричних функцій від аргумента  $\alpha$ .

Якщо до числа  $\alpha$  додається число  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (тобто число, що зображується на горизонтальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції не змінюється;

Якщо додається число  $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$  (тобто число, що зображується на вертикальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції змінюється на кофункцію.

Знак одержаного виразу визначається знаком початкового виразу, якщо умовно вважати кут  $\alpha$  гострим.

Запишіть формули для розв'язування рівняння  $\sin x = \alpha$ .





## Рівняння $\sin x = \alpha$

**Якщо**  $|\alpha| > 1$ , коренів немає.

**Якщо**  $|\alpha| \leq 1$ ,  $x = (-1)^k \arcsin \alpha + \pi k, k \in \mathbf{Z}$

( $\arcsin(-\alpha) = -\arcsin \alpha$ )

Окремі випадки:

$$\sin x = 0, x = \pi k, k \in \mathbf{Z}$$

$$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$$

$$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$$

Запишіть формули для розв'язування рівняння  $\cos x = \alpha$ .



## Рівняння $\cos x = \alpha$

**Якщо**  $|\alpha| > 1$ , коренів немає.

**Якщо**  $|\alpha| \leq 1$ ,  $x = \pm \arccos \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$(\arccos(-\alpha) = -\arccos \alpha)$

Окремі випадки:

$$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1, x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Запишіть формули для розв'язування рівнянь  $\operatorname{tg} x = \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} x = \alpha$ .



Рівняння  $\operatorname{tg} x = \alpha$

$$x = \operatorname{arctg} \alpha + \pi k, k \in \mathbf{Z}$$

$$(\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg} \alpha)$$

Рівняння  $\operatorname{ctg} x = \alpha$

$$x = \operatorname{arcctg} \alpha + \pi k, k \in \mathbf{Z}$$

$$(\operatorname{arcctg}(-\alpha) = \pi - \operatorname{arcctg} \alpha)$$

**Бажаю успіхів!**

