Чудові границі

Крім границі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, часто використовують деякі її варіації.

Приклад 1 Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$.

Розв'язання

▶ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{(\cos x)x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}}{\cos x}=\dfrac{1}{1}=1$. ◁

Приклад 2 Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$.

Розв'язання

▶ Очевидно, що $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}=1$. Дійсно,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\alpha}}=\frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}=1.$$

Оскільки $\alpha\to 0$, то, починаючи з деякого значення, α потрапляє у відрізок $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ $(\alpha\neq 0)$. Позначимо $\sin\alpha=x$, тоді $\alpha=\arcsin x$. Якщо $\alpha\to 0$, то $x=\sin\alpha\to 0$. У цих позначеннях границя $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}=1$ перетворюється на границю $\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{\arcsin x}{x}=1$. ◁

Приклад 3 Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.

Розв'язання

▶ Спочатку розглянемо границю

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\alpha}}=\frac{\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}=\frac{1}{1}=1.$$

Оскільки $\alpha\to 0$, то, починаючи з деякого значення, α потрапляє в інтервал $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(\alpha\neq 0)$. Позначимо $\operatorname{tg}\alpha=x$, тоді $\alpha=\operatorname{arctg} x$. Якщо $\alpha\to 0$, то $x=\operatorname{tg}\alpha\to 0$. У цих позначеннях із границі $\lim\limits_{\alpha\to 0}=\dfrac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1$ одержуємо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$. ◁