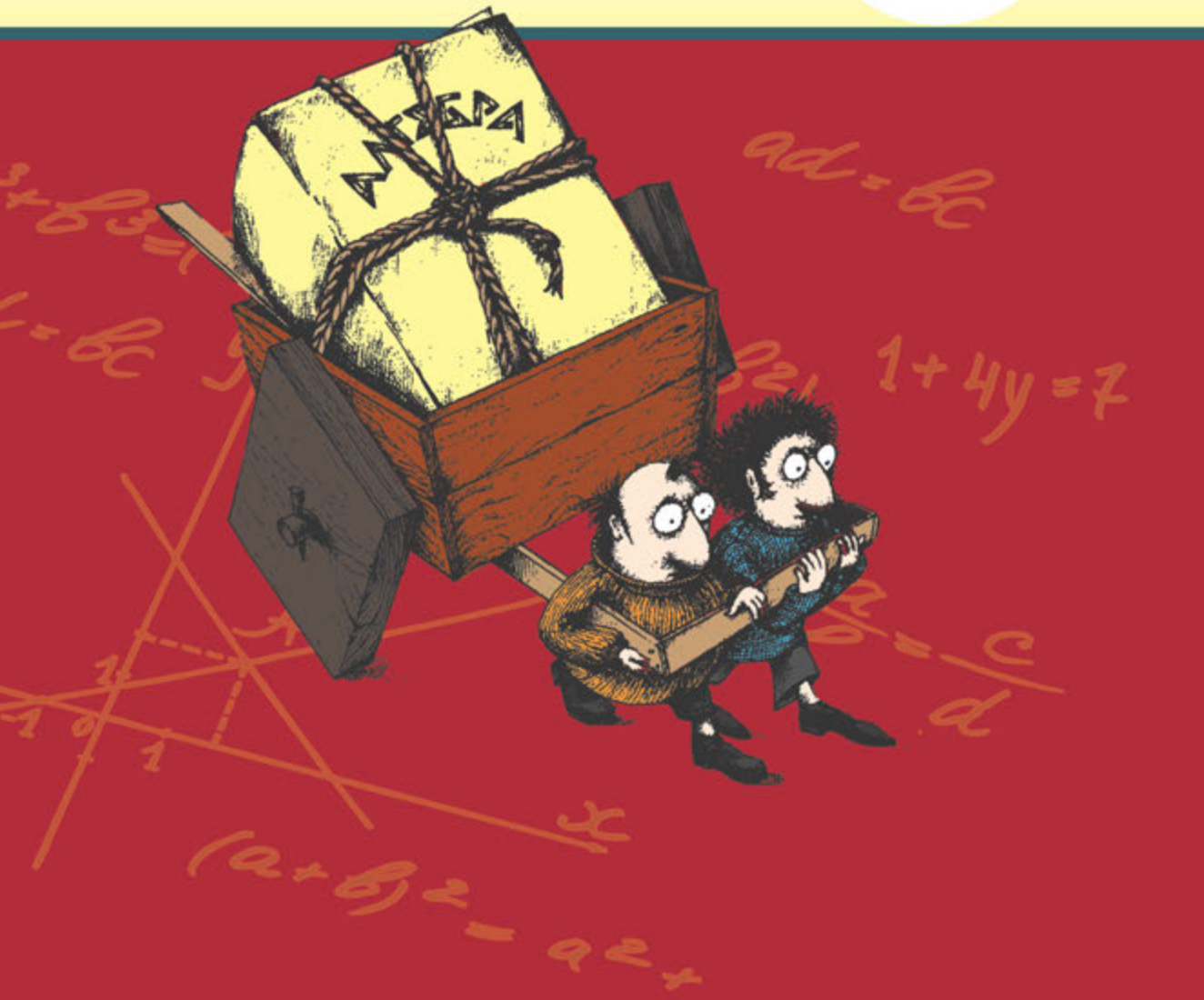
ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Інтернет-підтримка

О. І. Цейтлін

АЛГЕБРА 7



e-RANOK

О. І. Цейтлін

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
Видавництво «Ранок»
2015

www.e-ranok.com.ua

УДК [512:37.016](075.3)
ББК 22.14я721
Ц 32

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 20.07.2015 р. № 777)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Цейтлін О. І.
Ц 32 Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. І. Цейтлін. — Х. : Вид-во «Ранок», 2015. — 208 с. : іл.

ISBN 978-617-09-0403-4

Підручник містить необхідні теоретичні відомості та поняття, велику кількість завдань, диференційованих за рівнем складності, завдання для тематичного самоконтролю. Передбачена можливість отримати додаткову інформацію або пройти тестування в онлайн-режимі.

Призначено для учнів 7 класів, учителів математики та методистів.

УДК [512:37.016](075.3)
ББК 22.14я721

ІНТЕРНЕТ-ПІДТРИМКА
Для користування
електронними додатками
до підручника увійдіть на сайт
interactive.ranok.com.ua

Служба технічної підтримки:
тел. (098) 037-54-68
(понеділок–п'ятниця з 9:00 до 18:00)
E-mail: interactive@ranok.com.ua

ISBN 978-617-09-0403-4

© Цейтлін О. І., 2015
© Шинчук Б. І., Гірман Л. О., ілюстрації, 2015
© ТОВ Видавництво «Ранок», 2015

www.e-ranok.com.ua

ВСТУП

Математика — те, за допомогою чого люди керують природою і собою.

А. М. Колмогоров

Математика — одна зі стародавніх наук. Вона зародилася на світанку людської цивілізації. Будівництво, вимірювання площі земельних ділянок, навігація, торговельні розрахунки вимагали вміння виконувати арифметичні обчислення. Згодом математика сформувалась у стрункy логічну систему й стала складовою частиною комплексу наукових знань. Потреби науки, техніки, усієї практичної діяльності людей постійно ставили перед математикою нові завдання та стимулювали її розвиток.

Цього навчального року ти починаєш вивчати розділ математики, який має назву «алгебра».

Прийнято вважати, що основи алгебри заклали прадавні індійські математики. Саме вони вперше почали використовувати позиційну систему числення, нуль як число, символи для позначення дій над числами.

Алгебра від самого початку була наукою про рівняння. Вагомий внесок у розвиток теорії розв'язання рівнянь зробили математики Сходу, які писали арабською мовою. Насамперед це вчений Мухамед ібн Муса аль-Хорезмі, який жив у IX ст. н. е. Слово «алгебра» виникло у зв'язку з назвою його книги «Китаб аль-джебр валь-мукабала», одна з частин якої присвячена розв'язанню лінійних та квадратних рівнянь.

Відомий учений і поет Омар Хайям (1048–1131) у своєму «Трактаті про докази задач алгебри та аль-мукабали» вперше в історії розглядав алгебру як самостійну математичну дисципліну, що має загальнотеоретичне значення.

Приблизно до середини XIX ст. основним призначенням алгебри як науки було розв'язання рівнянь і систем рівнянь.

Саме з цього ти почнеш своє знайомство з новим для тебе предметом — алгеброю.

Головним об'єктом алгебри від початку XX ст. стає вже не розв'язання рівнянь, а вивчення алгебраїчних операцій з елементами довільної природи. Сучасна алгебра розглядає такі абстрактні поняття, як кільця, групи,

www.e-ranok.com.ua

поля, ідеали. Ознайомитися з ними можна в курсі вищої алгебри, методи якої дедалі ширше використовуються в багатьох розділах математики і є однією зі складових її прогресу.

Опанувати всі ці абстрактні поняття можна, але не одразу. Уважність під час вивчення *теоретичного матеріалу* підручника і наполегливість під час розв'язування *різнорівневих практичних завдань* стануть запорукою успіху в навчанні алгебри.

Як користуватися підручником

Підручник має п'ять глав, кожна з яких складається з параграфів. Параграфи містять теоретичний матеріал і приклади розв'язування задач. Наведено також дві додаткові глави для повторення. Найважливіші поняття й факти виділено.

Вправи та задачі, подані в підручнику, поділяються за рівнями складності. Найпростіші — завдання ***рівня А***, більш складні — завдання ***рівня Б***, найскладніші — завдання ***рівня В***.

Наприкінці кожного параграфа подано ***запитання для самоконтролю***, у тому числі творчого та пошукового характеру (позначені зірочкою). Узагальнити й систематизувати знання за кожною темою, підготуватися до контрольної роботи тобі допоможуть ***завдання для тематичного самоконтролю***. Пройшовши ***онлайн-тестування*** на електронному освітньому ресурсі interactive.ranok.com.ua, ти зможеш самостійно перевірити рівень своїх знань. Поглибити свої знання ти можеш, переглянувши ***відеоматеріали*** на тому самому ресурсі. Про можливість скористатися електронними матеріалами тобі нагадуватиме спеціальна позначка.

Якщо ти хочеш довідатися більше, звернись до рубрики ***«Для тих, хто цікавиться математикою»***. Якщо ти займаєшся в математичному гуртку чи береш участь у математичних турнірах та олімпіадах, спробуй розв'язати ***завдання підвищеної складності***.

Для полегшення роботи з підручником використано ***умовні позначки***:

— означення

— правило

www.e-ranok.com.ua

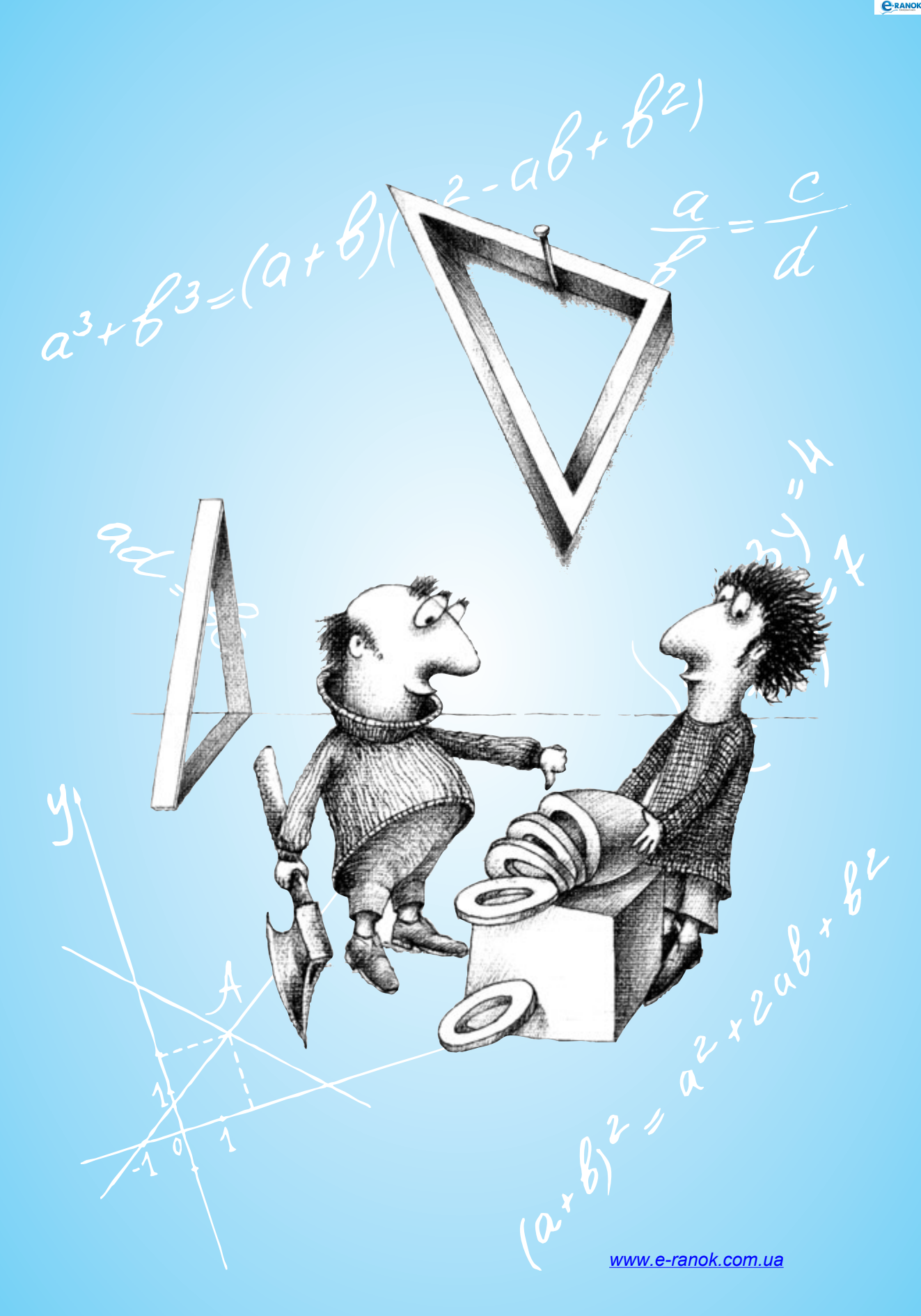
— початковий та середній рівні

— достатній рівень

— високий рівень

– посилання на сайт interactive.ranok.com.ua

А в подорожі країною Алгеброю тобі допоможуть два її мешканці.



www.e-ranok.com.ua

ПОВТОРЕННЯ

Подільність чисел

Запитання для повторення

1. Що називається дільником та кратним натурального числа?
2. Згадай ознаки подільності на 2; 5; 10; 3; 9.
3. Які числа називаються простими?
4. Що таке найбільший спільний дільник (НСД) і найменше спільне кратне (НСК) декількох натуральних чисел?
5. Які числа називаються взаємно простими?
6. Повтори алгоритм знаходження НСД і НСК.

1. Знайди найбільший спільний дільник чисел:

а) 18 і 24;
б) 72 і 108;
в) 660 і 990;
г) 28; 84 і 98;
ґ) 322; 96 і 112;
д) 220; 770 і 990.

2. Знайди найменше спільне кратне чисел:

а) 14 і 35;
б) 36 і 54;
в) 630 і 560;
г) 18; 21 і 24;
ґ) 12; 16 і 20;
д) 60; 120 і 360.

3. Доведи, що числа 468 і 833 є взаємно простими.

4. Між усіма учнями класу розподілили порівну 72 тістечка й 48 цукерок. Скільки учнів у класі, якщо відомо, що їх понад 20?

5. Автобус і маршрутне таксі рухаються тим самим маршрутом. Автобус робить зупинки через кожні 600 метрів, а маршрутне таксі — через кожний кілометр. Яку найменшу відстань повинні проїхати ці транспортні засоби, щоб їхні зупинки збіглися? (Перша зупинка в них спільна.)

www.e-ranok.com.ua

Звичайні дроби

Запитання для повторення

1. Сформулюй основну властивість дробу.
2. Як порівняти два дроби?
3. Як знайти дріб від числа?
4. Як знайти число за заданим значенням його дробу?
5. Як перетворити звичайний дріб на десятковий?
6. Згадай, як виконувати арифметичні дії зі звичайними дробами.

6. Згадай порядок виконання дій та обчисли:

а) $\left(\frac{1}{3}+0{,}4\right)\cdot\frac{5}{11}$;

б) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}5\right)$;

в) $4\cdot\left(\frac{3}{5}-0{,}25\right)$;

г) $4{,}6\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{13}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{7}{10}\right)$;

г) $\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{5}{6}+0{,}6\right)$;

д) $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right)\cdot 2{,}1$;

е) $\left(1{,}5-\frac{6}{7}\right):\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{4}\right)$;

є) $3\frac{3}{4}\cdot\left(4\frac{1}{5}-3\frac{1}{6}\right)+8{,}8\cdot\frac{5}{4}$.

7. Обчисли:

а) $\left(3\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right):\frac{1}{4}-4\frac{2}{7}\cdot 1\frac{2}{5}$;

б) $\left(1{,}21+\frac{3}{4}\right):0{,}98-\frac{5}{13}:\frac{10}{39}+1{,}5$;

в) $\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+0{,}45\right):0{,}16-0{,}132:0{,}06+\frac{1}{5}$;

г) $\left(\frac{4}{7}\cdot 0{,}14+\frac{3}{25}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-0{,}075\right)+2{,}19:6$;

г) $\left(3{,}4-3{,}24\right):\frac{16}{25}+2\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{11}$;

д) $\left(0{,}16\cdot 17\frac{1}{2}-1\frac{3}{20}\right):\left(2\frac{5}{14}+3\frac{1}{7}:2{,}4\right)+0{,}05$;

е) $\left(\left(\frac{30}{91}\cdot 1{,}3-1{,}7:10\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{7}{11}+\left(0{,}8+\frac{7}{15}\right):2{,}375\right):3\frac{1}{2}$;

є) $\left(3\frac{3}{25}:3{,}12+1\frac{1}{2}-\frac{2}{15}\right):\left(2{,}5+6\frac{2}{3}\right)+0{,}18\cdot 1\frac{1}{3}\cdot$

www.e-ranok.com.ua

8. Петрик та Федько живуть на одній вулиці на відстані $4\frac{1}{2}$ км один від одного. Хлопці одночасно вирушили з домівок назустріч один одному. При цьому Петрик поїхав на велосипеді зі швидкістю $10\frac{1}{2}$ км/год, а Федько пішов пішки зі швидкістю 3 км/год. Через який час вони зустрілися? Зроби рисунок та обчисли.

9. Обчисли:

а) $\frac{2}{5}$ від 60;

б) $\frac{3}{4}$ від 64;

в) $\frac{5}{8}$ від 20;

г) $\frac{2}{3}$ від 1,8.

10. Знайди число, якщо:

а) $\frac{3}{7}$ його дорівнюють 36;

б) $\frac{3}{4}$ його дорівнюють 35;

в) $1\frac{1}{6}$ його дорівнює 63;

г) $\frac{2}{5}$ його дорівнюють $\frac{10}{11}$;

ґ) $\frac{1}{2}$ його дорівнює $3\frac{1}{2}$;

д) $\frac{3}{2}$ його дорівнюють $15\frac{3}{4}$.

11. Середня тривалість життя чорного дрозда — 8 років, що становить $\frac{4}{5}$ середньої тривалості життя зозулі, $\frac{2}{5}$ тривалості життя лебедя або $\frac{2}{3}$ тривалості життя голуба. Яка середня тривалість життя зозулі, лебедя та голуба?

12. Довжина сторони прямокутника дорівнює $2\frac{2}{5}$ см, а ширина становить $\frac{2}{3}$ його довжини. Знайди периметр і площу прямокутника.

13. Петрик самостійно прибирає квартиру за 3 год, а його молодший брат — за 5 год. За який час вони приберуть квартиру, працюючи разом?

www.e-ranok.com.ua

Відношення й пропорції

Запитання для повторення

1. Що називається пропорцією?
2. Сформулюй основну властивість пропорції.
3. Що називається відсотком?
4. Як знайти відсоток від числа?
5. Як знайти число за заданим значенням його відсотка?
6. Як знайти, скільки відсотків одне число становить від іншого?
7. Як знайти зміну величини у відсотках?
8. Згадай, що таке випадкова подія та як знайти її імовірність.
9. Як знайти довжину кола та площу круга?

14. Обчисли:

а) 25 % від 26,4;
б) 15 % від 40;
в) 32 % від 75;
г) 105 % від 60;
ґ) 11,8 % від 80;
д) 5,5 % від 25,6.

15. Знайди число, якщо:

а) 12 % його дорівнюють 42;
б) 32 % його дорівнюють 20;
в) 120 % його дорівнюють 54;
г) 225 % його дорівнюють 54;
ґ) 1,4 % його дорівнює 98;
д) 7,8 % його дорівнюють 19,5.

16. Обчисли, скільки відсотків одне число становить від іншого:

а) 20 від 25;
б) 6,4 від 16;
в) 56 від 3,5;
г) 1,8 від 45;
ґ) 16 від 6,4;
д) 3,9 від 52;
е) 10,4 від 26;
є) 48 від 1,6;
ж) 25 від 20;
з) 1,5 від 75;
і) 24 від 16;
к) 81 від 729.

17. Катерина поклала на рахунок у банку 3600 грн. Протягом перших 5 місяців річний приріст вкладу був 8 %, а потім збільшився до 10 %. Яка сума буде на рахунку в Катерини через рік?

www.e-ranok.com.ua

18. Знайди, на скільки відсотків змінилося число у разі зміни:

а) від 32 до 36;
б) від 1,6 до 2,2;
в) від 250 до 255;
г) від 7,2 до 4,5;
ґ) від 24 до 138;
д) від 50 до 35;
е) від 13,2 до 16,5;
є) від 2,8 до 7,7;
ж) від 21 до 43,4;
з) від 30 до 32,5;
і) від 56 до 32;
к) від 35 до 11.

19. Телевізор коштував 4100 грн. Спочатку його ціна збільшилася на 20 %, а потім зменшилася на 20 %. Знайди нову вартість телевізора.

20. Першого дня Юрко на дачі скопав 28 % загальної площі городу, а другого — 40 % решти. Після цього залишилося скопати 5,4 м^2. Знайди загальну площу городу.

21. Поділи:

а) число 480 на три частини у відношенні 3 : 4 : 5;
б) число 525 на чотири частини у відношенні 3 : 4 : 5 : 9.

22. Розв'яжи рівняння:

а) $\frac{12}{17}\cdot t=\frac{4}{7}\cdot\frac{24}{51}$;
б) $\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{21}=\frac{75}{49}\cdot t$;
в) $\frac{18}{25}\cdot\frac{6}{35}=t\cdot\frac{27}{175}$;
г) $t\cdot\frac{8}{13}=\frac{28}{91}\cdot\frac{6}{7}$.

23. Автомобіль проїжджає відстань від Одеси до Чернігова за 8,4 год. За який час він проїде цю саму відстань, якщо збільшить свою швидкість в 1,4 разу?

24. 11 робітників виконують монтажні роботи за 48 днів. Скільки потрібно робітників, щоб виконати ті самі роботи за 33 дні за умови тієї самої продуктивності праці?

25. 28 трактористів можуть виорати поле за 17 днів. За скільки днів можуть виорати це саме поле 14 трактористів за такої самої продуктивності праці?

www.e-ranok.com.ua

26. З 200 кг картоплі можна отримати 36 кг крохмалю. Скільки крохмалю можна отримати з 375 кг картоплі?

27. Для покриття підлоги потрібно 45 м лінолеуму завширшки 2,2 м. Скільки лінолеуму завширшки 1,5 м потрібно для покриття підлоги тієї самої площі?

28. Для фарбування 15 м^2 підлоги використано 1,5 кг емалі. Скільки емалі потрібно для фарбування підлоги в кімнаті завдовжки 6,3 м і завширшки 4,5 м?

29. Податок на додаткову вартість (ПДВ) становить 20 % вартості товару. Визнач суму податку з товару, який було продано за 53 262 грн.

30. На диску записано дані в трьох файлах. Перший файл містить 30 % усього об'єму даних, другий — 30 % решти, а об'єм третього файла становить 539 Кбайт. Знайди об'єм даних, які записано на диску.

31. Скільки відсотків становить число $5\frac{8}{11} \cdot \left(6\frac{4}{9} - 5\frac{4}{7}\right)$ від числа $\left(20{,}175 + 8\frac{5}{8}\right) : 1\frac{4}{5}$?

32. Знайди довжину кола, діаметр якого дорівнює 5,2 дм.

33. Знайди довжину кола, радіус якого дорівнює 0,34 м.

34. Обчисли радіус кола, якщо його довжина — 20,41 см. Число π округли до сотих.

35. Знайди площу круга, радіус якого дорівнює 19 см.

36. Знайди площу круга, діаметр якого дорівнює 12 см.

37. Довжина меншого кола становить 65 % довжини більшого кола. Скільки відсотків площі більшого круга становить площа меншого круга?

www.e-ranok.com.ua

38. У художній школі було виставлено роботи учнів чотирьох класів. За даними діаграми (рис. 1) визнач, скільки робіт подав кожний клас, якщо всього було 200 робіт.

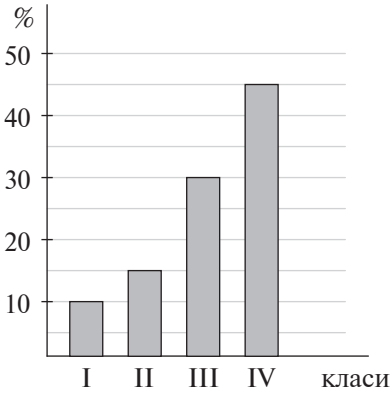


Рис. 1

Рис. 2

39. На рис. 2 показано, чим займається після школи більшість із 20 учнів сьомого класу. Скільки учнів займаються музикою? Скільки учнів займаються спортом? Скільки учнів відвідують гуртки за інтересами? Скільки учнів займаються іншими справами?

40. У бібліотеці є 12 000 книжок, виданих різними мовами. З них $\frac{3}{10}$ — це книжки, видані англійською мовою, $\frac{3}{40}$ — німецькою, $\frac{1}{5}$ — російською, решта — українською. Визнач, скільки в бібліотеці книжок, виданих українською мовою. Побудуй за цими даними кругову діаграму.

41. Яка ймовірність того, що під час кидання грального кістки випаде 6 очок; непарне число очок; число очок, що є простим числом; число очок, що ділиться на 3?

42. На класній вечірці було організовано лотерею. Із 40 лотерейних білетів 5 були виграшними. Яка ймовірність виграшу для того, хто першим витягне білет?

43. Маленькому хлопчику, який ще не вміє рахувати, дали три картки із цифрами 1, 2, 3 і спитали, скільки вийде, якщо 12 помножити на 11. Хлопчик виклав навмання три картки поспіль. Яка ймовірність того, що з першої спроби він відповів правильно?

www.e-ranok.com.ua

Раціональні числа та дії з ними

Запитання для повторення

1. Як зображуються числа на числовій прямій?
2. Сформулюй означення раціонального числа.
3. Що називається модулем числа? У чому полягає його геометричний зміст?
4. Як порівняти два раціональні числа?
5. Згадай, як виконувати арифметичні дії (додавання, віднімання, множення й ділення) з додатними та від'ємними числами.
6. Сформулюй правила розкриття дужок.
7. Які доданки називаються подібними? Як зводити подібні доданки?
8. Які прямі називаються паралельними? Як через точку, що не лежить на даній прямій, провести пряму, паралельну даній?
9. Які прямі називаються перпендикулярними?
10. Що таке координатна площина?
11. Як знайти на координатній площині точку за її координатами?
12. Як визначити координати певної точки на координатній площині?

44. Обчисли:

а) $31 + |-3| - |-17|$;

б) $|-14| - |-6| + |12|$;

в) $|12| + |0| - |-63|$;

г) $-\left|\frac{4}{15}\right| \cdot \left|-1\frac{1}{2}\right| + 5\frac{1}{3} : \left|26\frac{2}{3}\right| + |-1{,}4|$;

ґ) $0{,}8 \cdot |-0{,}41| + |-0{,}7| \cdot (3{,}2 - 1{,}7) + |0{,}122|$;

д) $2\frac{5}{8} : \left|-2\frac{3}{16}\right| - \left|\frac{2}{5} + \frac{4}{7}\right| : 1\frac{13}{21} - |-0{,}1|$.

45. Знайди значення виразу:

а) $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{4}\right) : \left(-8\frac{2}{3}\right) - 1\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{7}{25}\right)$;

б) $\left(\frac{1}{10} - \frac{8}{15}\right) \cdot \left(-7\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{8}\right) : \left(-2\frac{1}{6}\right)$;

www.e-ranok.com.ua

в) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{9}\right)\cdot 18-3\frac{11}{15}:3\frac{1}{5}$;

г) $(-2{,}76-2{,}84):14-2{,}2\cdot(-1{,}6)$;

ґ) $\dfrac{3{,}6:(-1{,}6)-4{,}12}{5{,}14-4{,}79}$;

д) $\dfrac{-1{,}7\cdot(-2{,}3)-9{,}49}{6{,}03-5{,}79}$;

е) $-2\frac{2}{3}+2\frac{1}{3}\cdot\left(-15\frac{3}{7}-(-4{,}8):\frac{4}{15}\right)$;

є) $-3\frac{3}{4}-\left(-8\frac{2}{9}-(-4{,}5):\frac{9}{14}\right)\cdot 2\frac{1}{4}$.

46. Спрости вираз:

а) $5-3a+2a-4+3-8a$;

б) $3\frac{1}{5}a-4\frac{1}{6}b-4\frac{1}{3}a+2\frac{3}{8}b$;

в) $1\frac{5}{6}y-5y+6\frac{1}{3}-2\frac{1}{9}y+\frac{2}{7}y+2\frac{1}{2}$;

г) $\frac{8}{15}\cdot\left(2\frac{1}{4}a-7\frac{1}{2}b\right)-\frac{7}{30}\cdot\left(4\frac{2}{7}a-8\frac{4}{7}b\right)$;

ґ) $3(3x-55)-2(6x+1)+4(2x+3)$;

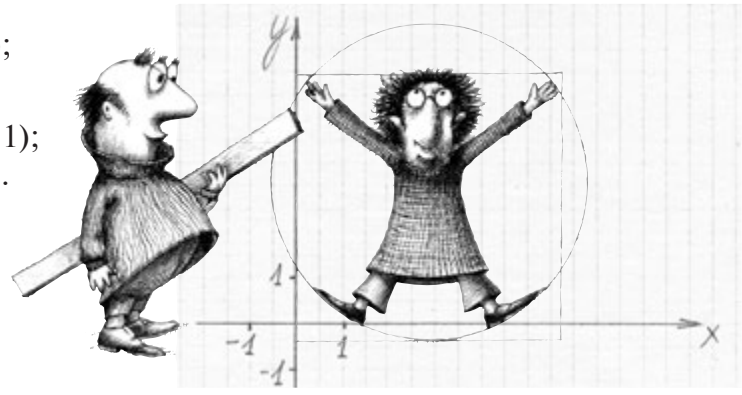
д) $2{,}8(5b-6c)-(7b-8c)\cdot 1{,}2$;

е) $7c-(2y-(4c+(3y-5c)))$.

47. Накресли на координатній площині чотирикутник із заданими вершинами і запиши координати точок перетину його сторін з осями координат.

а) $A(1;-5)$; $B(4;-1)$; $C(1;3)$; $D(-2;2)$.

б) $P(-1;-3)$; $Q(5;-1)$; $R(0;3)$; $S(-4;-1)$.



www.e-ranok.com.ua

48. Досліди графік руху велосипедиста (див. рисунок). Дай відповіді на запитання.

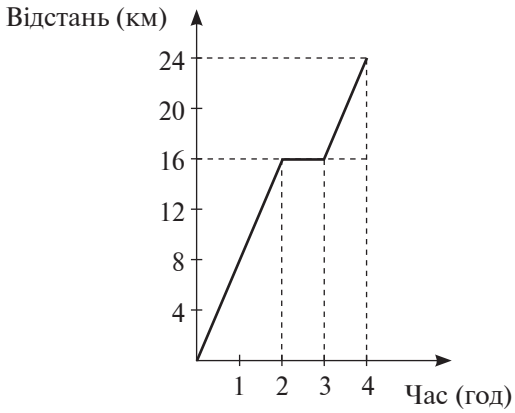
а) Через який час після початку руху велосипедист зробив зупинку?

б) Скільки часу тривала зупинка?

в) З якою швидкістю велосипедист продовжив рух?

г) Скільки кілометрів проїхав велосипедист після зупинки?

ґ) Скільки всього кілометрів проїхав велосипедист?



49. Побудуй графік зміни температури повітря за даними таблиці:

Час (год)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Температура (°С)	−10	−12	−10	−9	−7	−6	−10	−13	−14

50. З'ясуй, чому перший квадрат можна назвати «магічним». У другому і третьому квадратах заміни зірочки числами так, щоб ці квадрати стали «магічними».

0,9	0,2	0,7
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{1}{2}$	1	0,3

$\frac{2}{5}$	0,9	$\frac{4}{5}$
*	0,7	0,3
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	*

$\frac{7}{10}$	*	*
*	1	*
1,1	*	1,3

51. Із порту одночасно вийшли три кораблі. Перший корабель повертається до порту через кожні 4 тижні, другий — кожні 8 тижнів, а третій — кожні 12 тижнів. Через скільки тижнів усі три кораблі вперше знову зустрінуться в порту?

www.e-ranok.com.ua

Завдання для тематичного самоконтролю

1. Знайди значення виразу:

а) $(6{,}18 : 1{,}5 + 3{,}2 \cdot 1{,}4) : ((15{,}6 - 2{,}7) : 3)$;

б) $\left(1\frac{3}{4} + 1{,}15 - 1\frac{8}{25}\right) : \left(2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} + 0{,}04\right)$;

в) $3{,}24 : (-4{,}8) - 2{,}61 : (4{,}32 - 6{,}12)$;

г) $-4\frac{1}{7} + 2\frac{1}{4} \cdot \left(-11\frac{2}{9} - (-5{,}4) : \frac{9}{35}\right)$.

2. Спрости вираз:

а) $4(3 - 2x) - 5(6 - x) + 6(2x - 5)$;

б) $-(-4{,}9 - 5{,}8z) - (3{,}1z - 5{,}6)$;

в) $m + (3m - (2m - 1))$.

3. Марійчина мати поклала в банк 4000 грн під 12 % річних. Через рік вона зняла зі свого рахунку 1000 грн, а ще через рік зняла решту грошей. Яку суму Марійчина мати отримала в банку другого разу?

4. Діаметр круга дорівнює 4 см. У блакитний колір зафарбували сектор, який становить $\frac{3}{8}$ круга. Яка довжина дуги зафарбованого сектора?

5. Загальна площа квартири Петрових дорівнює 120 м^2. Вітальня займає $\frac{3}{10}$ цієї площі, спальня батьків — $\frac{1}{6}$, дитяча кімната — $\frac{1}{5}$, кухня — $\frac{3}{20}$, ванна кімната — $\frac{1}{15}$. Яку площу займає решта приміщень?

6. Ганна у крамниці витратила 40 % своїх грошей на купівлю зошита, а $\frac{2}{3}$ решти — на купівлю фломастерів. Після цього в неї залишилось 12 грн. Скільки грошей було в Ганни до відвідування крамниці?

7. Восени, коли Сашко пішов до школи, його зріст дорівнював 128 см, а навесні — 136 см. На скільки відсотків збільшився зріст Сашка протягом навчального року?

8. Абонент забув останню цифру телефону, який мав набрати. Яка ймовірність того, що він з першого разу набере правильний номер?

Пройди онлайн-тестування

www.e-ranok.com.ua

www.e-ranok.com.ua

ГЛАВА 1. ЦІЛІ ВИРАЗИ

1.1. Вирази зі змінними. Тотожності

Тривалий час алгебра була частиною науки про числа — арифметики. Значна частина різних задач, які ставить життя, розв'язуються однаковими способами. Використовуючи замість чисел букви, математики навчилися розв'язувати такі задачі в загальному вигляді.

За допомогою математичних записів можна охарактеризувати зв'язки між різними величинами, описати процеси та закономірності, які спостерігаються в навколишньому світі. Такі математичні записи називають **виразами**.

Для запису виразів використовують букви, числа, знаки дій та дужки.

Наприклад: $8 - 3$; $\left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdot 7$; $\frac{2t + z}{3}$; $\frac{x + 3y}{x - y}$.

Перші два вирази містять тільки числа, а в останніх, крім чисел, є змінні.

Математичні записи, які містять тільки числа, знаки дій та дужки, називаються числовими виразами.

Математичні записи, які містять числа, змінні, знаки дій та дужки, називаються виразами зі змінними.

Вираз може складатися з одного числа або з однієї змінної.

Якщо замість змінних у вираз підставити числа, то отримаємо **числовий вираз**. Виконавши всі дії, знайдемо **числове значення** цього виразу.

Значення числового виразу є значенням виразу зі змінними для заданих значень змінних.

www.e-ranok.com.ua

Приклад 1. Знайдемо значення виразу

$0{,}2a + 3b - ab + \frac{7}{4}$, якщо $a = -0{,}1$; $b = 2{,}5$.

Розв'язання.

Підставивши в початковий вираз замість змінних a та b їхні значення, отримаємо:

$$0{,}2 \cdot (-0{,}1) + 3 \cdot 2{,}5 - (-0{,}1) \cdot 2{,}5 + \frac{7}{4} = -0{,}02 + 7{,}5 + 0{,}25 + 1{,}75 = 9{,}48.$$

Число 9,48 називають числовим значенням виразу за даних значень змінних.

Цілим виразом називається вираз, який не містить ділення на змінну.

Наприклад: вирази $-23{,}5$; $2ax + b$; $\frac{1}{3}xy$; $\frac{x + 2y}{4}$ є цілими, а вирази $\frac{2a}{b}$; $\frac{-14}{x + 1}$; $\frac{x - y}{x + y}$ не є цілими.

Два вирази зі змінними називаються тотожно рівними, якщо їхні відповідні значення рівні за будь-яких значень змінних.

Рівність двох тотожно рівних виразів називається тотожністю.

Наприклад, відомі тобі закони арифметичних дій є тотожностями:

$a + b = b + a$;

$a(b + c) = ab + ac$;

$a - (b + c) = a - b - c$.

www.e-ranok.com.ua

Приклад 2. Доведемо тотожність $1{,}5(2 + a) - 0{,}5a = 3 + a$.

Доведення.

У лівій частині рівності розкриємо дужки та зведемо подібні доданки: $1{,}5(2 + a) - 0{,}5a = 3 + 1{,}5a - 0{,}5a = 3 + a$.

Ліва частина дорівнює правій. Тотожність доведено.

Важливо навчитися перетворювати та спрощувати алгебраїчні вирази. Для цього ми будемо використовувати **тотожні перетворення виразів**, у результаті яких вирази замінюються тотожно рівними їм виразами. З найважливішими з них ти познайомишся в цій главі.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке вираз зі змінною?
2. Що називають числовим значенням виразу зі змінною?
3. Який вираз називається цілим? Наведи приклади.
4. Які вирази називаються тотожно рівними?
5. Що називається тотожністю?

6*. Пригадай, з якими тотожними перетвореннями виразів ти вже знайомий.

Дивись відеоматеріали

52. Які з поданих виразів є цілими?

а) $4(x + 2y)\,x$;

б) $0{,}16a - \frac{1}{3}b$;

в) $\frac{a - 1}{3a + 1}$;

г) $(x - 5)(x + 2)$;

ґ) $(x + y - 5) : (x + 6)$;

д) $\frac{2x}{7} - \frac{3}{5y}$;

е) $-3x + 2 + \frac{1}{x}$;

є) $\frac{5x - y}{12}$.

www.e-ranok.com.ua

53. Знайди значення виразу для заданих значень змінних:

а) $12 - 8x$, якщо $x = 4; -2; 0; -\frac{3}{8}$;

б) $a^2 - 3a$, якщо $a = 5; -6; 0{,}1; \frac{1}{2}$;

в) $3c + 4d$, якщо $c = 7$ та $d = -4$; $c = -1{,}4$ та $d = 3{,}7$;

г) $(3x - 5)y$, якщо $x = 0{,}3$ та $y = -0{,}8$.

54. Заповни таблицю:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$-3x + 2$									

55. Запиши у вигляді виразу:

а) суму $3a$ та $6b$;
б) різницю b та $0{,}4c$;
в) суму квадратів c та d;
г) різницю квадратів x та y;
ґ) суму квадрата x та куба y;
д) квадрат різниці a та b;
е) півсуму добутку 0,5 і c та числа 1,2.

56. Перевір, чи є подана рівність тотожністю:

а) $2x - 3 + 7 = 2(2 + x)$;
б) $2(4 - 3) - (4 - 5) = 4 + 1$;
в) $3(a + 3) = a + 9$.

57. Спрости вираз і знайди його значення:

а) $1\frac{1}{2}\left(-2{,}4 + 3\frac{4}{5}b\right) - 1{,}6\left(2\frac{1}{4}a - b\right)$, якщо $a = 2$; $b = -3$;

б) $-\frac{5}{8}\left(3{,}2m - 1\frac{3}{5}n\right) - 7{,}2\left(-\frac{4}{9}m + 2{,}5n\right)$, якщо $m = -10$; $n = -0{,}1$;

www.e-ranok.com.ua

в) $\frac{1}{2}\left(1{,}6x - 6\frac{2}{5}y\right) - 2{,}4\left(1\frac{1}{2}x + y\right)$, якщо $x = 3$; $y = -4{,}5$;

г) $-\frac{5}{9}\left(5{,}4a - 1\frac{4}{5}b\right) - 6{,}4\left(-\frac{3}{8}a + 2{,}5b\right)$, якщо $a = -10$; $b = 0{,}1$.

58. Один робітник виготовляє за день a деталей, а другий — на 6 деталей менше. Скільки деталей вони виготовили разом, якщо перший працював 4 дні, а другий — 5 днів? Склади вираз і обчисли його значення, якщо $a = 25$.

59. Обчисли значення виразу $|x| : x$, якщо $x = 2{,}3;\ 0{,}5;\ -1{,}7;\ 2\frac{1}{4};\ -3\frac{4}{9}$. Який висновок про значення виразу можна зробити?

60. Запиши вираз, який являє собою:

а) парне число;
б) непарне число;
в) натуральне число, кратне 5;
г) натуральне число, що ділиться на 5 з остачею 3.

61. Перевір, чи є подана рівність тотожністю:

а) $3x + |4 - 2| = 3x + 2$;
б) $|a| + 1 = a + 1$;
в) $|b + 2| = b + 2$.

www.e-ranok.com.ua

1.2. Степінь із натуральним показником

Добуток, що містить понад два однакові множники, дуже незручно записувати за допомогою знаків множення. Наприклад, добуток восьми співмножників, кожен з яких дорівнює 5, записується як $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Для спрощення таких записів уводиться дія **піднесення до степеня**.

Замість того щоб у добутку писати той самий множник декілька разів, його записують тільки один раз, зазначивши число повторень:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ співмножників}} = a^n.$$

У записі a^n змінна a називається основою степеня, натуральне число n — показником степеня, а сам вираз a^n («a в степені n») — степенем або степеневим виразом.

n-м степенем числа a називається добуток n співмножників, кожен з яких дорівнює a, причому n — натуральне, $n > 1$.

У цьому означенні n — натуральне число, більше за одиницю, тому що немає сенсу розглядати добуток, який складається менш ніж із двох множників.

Приклад 1. а) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$;

б) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$;

в) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = (-4)^3 = -64$;

г) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = (-1)^4 = 1$;

ґ) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^6$.

Перший степінь будь-якого числа або змінної дорівнює самому цьому числу або змінній.

Приклад 2. а) $4^1 = 4$;

б) $\left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{2}{5}$;

в) $x^1 = x$;

г) $(-y)^1 = -y$.

Як ти вже знаєш, другий степінь числа називають **квадратом** числа, наприклад: 2^2; a^2; $(-x)^2$; а третій степінь — його **кубом**, наприклад: b^3; $(-3)^3$; 4^3.

www.e-ranok.com.ua

Якщо $a > 0$, то $-a < 0$, і вираз $(-a)^n$ — степінь від'ємного числа.

Згідно з правилом множення від'ємних чисел, за умови парної кількості множників добуток буде додатним, а якщо кількість множників непарна — від'ємним.

Степінь від'ємного числа додатний, якщо показник степеня парний, і від'ємний, якщо показник степеня непарний:
якщо $a < 0$ та n парне, то $a^n > 0$;
якщо $a < 0$ та n непарне, то $a^n < 0$.

Приклад 3. а) $(-2)^5 = -2^5 = -32$;
б) $(-3)^4 = 3^4 = 81$;
в) $(-1)^{273} = -1^{273} = -1$;
г) $(-1)^{2008} = 1^{2008} = 1$.

Якщо a — додатне число, то вираз a^n — степінь додатного числа, він є додатним за будь-якого n.
Вираз $-(a^n)$ — це число, протилежне степеню додатного числа, воно є від'ємним за будь-якого n.

Приклад 4. а) $2^3 = 8$;
б) $-2^3 = -(2^3) = -8$;
в) $-4^2 = -(4^2) = -16$;
г) $\left(1\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}$.

Запитання для самоконтролю
1. Що називається степенем числа a?
2. Чому дорівнює перший степінь будь-якого числа?
3. Що таке квадрат і куб числа?
4. Яких значень може набувати степінь від'ємного числа?
5. Яких значень може набувати степінь додатного числа?
6*. Яких значень може набувати степінь модуля раціонального числа?

Дивись відеоматеріали

www.e-ranok.com.ua

62. Обчисли:

а) 3^2; 5^2; 6^2; 2^3; 3^3; $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\left(\frac{1}{4}\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2$;

б) 20^2; 40^2; 50^2; $0{,}3^2$; $0{,}4^2$; $0{,}5^2$; 60^2; $0{,}6^2$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; 20^3; 30^3; $0{,}2^3$; $0{,}3^3$;

г) 10^2; 10^3; 10^4; 10^5; 10^6; 10^1;

ґ) $0{,}1^2$; $0{,}1^4$; $0{,}1^3$; $0{,}1^5$; $-(1)^{532}$; $-(1)^{725}$.

63. Запиши вираз у вигляді добутку степенів:

а) $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$;

б) $-6 \cdot 7 \cdot (-6) \cdot 7 \cdot 7 \cdot (-6) \cdot (-6)$;

в) $-2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{3} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$;

г) $\frac{2}{3} \cdot (-5) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-5) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$;

ґ) $0{,}3 \cdot (-4) \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot (-4) \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3$;

д) $\frac{1}{7} \cdot (-3) \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot (-3)$.

64. Обчисли:

а) 5^3; $(-4)^3$; 2^5; $(-3)^4$; $(-5)^3$;

б) -2^4; $(-6)^3$; -8^3; $(-7)^3$; $(-9)^2$;

в) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; $\left(\frac{3}{5}\right)^3$; $\left(\frac{4}{7}\right)^3$; $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$; $-\left(\frac{1}{4}\right)^4$;

г) $\left(1\frac{1}{2}\right)^4$; $\left(-1\frac{1}{4}\right)^3$; $0{,}2^6$; $(-0{,}3)^4$; $(-0{,}5)^3$;

ґ) $\left(1\frac{2}{5}\right)^3$; $-\left(1\frac{2}{7}\right)^2$; $(-0{,}7)^3$; $-0{,}8^2$; $(-0{,}9)^3$.

65. Обчисли площу квадрата зі стороною a, якщо:

а) $a = 5$ см;

б) $a = 12$ см;

в) $a = 3{,}2$ м;

г) $a = 1{,}6$ дм.

www.e-ranok.com.ua

66. Знайди значення виразу x^2y^3, якщо:

а) $x = -3$ та $y = -0{,}2$; б) $x = 4$ та $y = 0{,}3$.

67. Порівняй числа:

а) 2^3 і 3^2; в) 5^3 і 4^4;

б) 4^2 і 3^4; г) 6^3 і 5^4.

68. Запиши вираз у вигляді добутку степенів:

а) $aabaabbaaa$; в) $2ccc \cdot 2cccccc$;

б) $x(-y)xxx(-y)x(-y)(-y)$; г) $a\left(-\frac{3}{b}\right)aaa\left(-\frac{3}{b}\right)\left(-\frac{3}{b}\right)a$.

69. Обчисли:

а) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4; \left(-\frac{4}{5}\right)^3; -\left(\frac{2}{7}\right)^2; \left(-2\frac{1}{2}\right)^4; \left(-2\frac{1}{3}\right)^3;$

б) $0{,}2^7; (-0{,}2)^5; -0{,}3^4; 0{,}8^3; (-0{,}7)^3;$

в) $80^3; -30^4; 20^5; (-30)^3; (-20)^4;$

г) $2{,}5^2; -7{,}2^2; (-9{,}6)^2; -5{,}4^2; (-3{,}7)^2.$

70. Знайди значення виразу $x \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 10^3 + y \cdot 10^4$, якщо $x = 2$; $y = 0{,}04$.

71. Обчисли об'єм куба з ребром a, якщо:

а) $a = 4$ см;

б) $a = 8$ дм;

в) $a = 1{,}3$ м;

г) $a = 2{,}1$ см.

www.e-ranok.com.ua

72. Знайди значення виразу:

а) $\left(1\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}\right)^3$;

б) $\left(-2\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\right)^2$;

в) $\left(-3\frac{3}{4}:\left(-4\frac{1}{6}\right)\right)^3$;

г) $\left(1\frac{2}{3}:\left(-5\frac{5}{6}\right)\right)^4$;

ґ) $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)^2$;

д) $-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)^3$;

е) $\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\right)^4$;

є) $-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)^3$;

ж) $\left(3\cdot\frac{5}{9}-\frac{1}{2}\right)^3$;

з) $\left(2\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{21}{80}\right)\right)^4$;

і) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)^3$;

к) $-(1{,}8-3{,}2)^2$.

73. Обчисли значення виразу $0{,}18\cdot x^n$, якщо:

а) $x=10$ і $n=2;\ 3;\ 4$;

б) $x=0{,}1$ і $n=1;\ 2$;

в) $x=\frac{2}{3}$ і $n=2;\ 3$.

74. Обчисли:

а) $3\cdot1{,}2:\left|-4\right|-\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left|-1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right|$;

б) $\left|2{,}5\cdot0{,}00014\cdot10^4-5\right|\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{5}$;

в) $\left|\frac{1}{5}-\frac{5}{8}\right|\cdot\left(3\frac{2}{5}\right)^{-1}-6\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)$.

75. Обчисли значення виразу $\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}+2ab$, якщо:

а) $a=-0{,}8$ і $b=-0{,}5$;

б) $a=-0{,}2$ і $b=0{,}4$.

www.e-ranok.com.ua

1.3. Множення та ділення степенів із натуральним показником. Степінь із нульовим показником

Розглянемо добуток степенів з однаковими основами:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ разів}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n) \text{ разів}} = a^{m+n}.$$

Отже, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Щоб перемножити степені з однаковими основами, потрібно додати показники степенів, а основу залишити без змін.

Тепер розділимо степені з однаковими основами ($a \neq 0$), припускаючи, що натуральний показник степеня діленого більший, ніж натуральний показник степеня дільника:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ разів}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ разів}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{(m-n) \text{ разів}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m-n) \text{ разів}} = a^{m-n}.$$

Тому $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, якщо $a \neq 0$ та $m > n$.

Нульовий степінь будь-якого числа, відмінного від нуля, дорівнює одиниці: $a^0 = 1$.

Приклад 1. а) $27^0 = 1$;

б) $\left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1$;

в) $(-0{,}13)^0 = 1$;

г) $(-127{,}82)^0 = 1$.

Припускаючи, що $m = n$, отримаємо: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$.

Таким чином, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, якщо $a \neq 0$ та $m \geq n$.

Щоб розділити степені з однаковими основами, потрібно від показника степеня діленого відняти показник степеня дільника, а основу залишити без змін.

www.e-ranok.com.ua

Приклад 2. а) $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$;
б) $5 \cdot 5^2 = 5^{1+2} = 5^3 = 125$;
в) $(-4)^2 \cdot (-4)^3 = (-4)^{2+3} = (-4)^5 = -1024$;
г) $5^5 : 5^3 = 5^{5-3} = 5^2 = 25$;
ґ) $(-2)^{13} : (-2)^9 = (-2)^{13-9} = (-2)^4 = 16$;
д) $b^5 : b^3 = b^{5-3} = b^2$, якщо $b \neq 0$.

Нульовий степінь нуля не визначається.
Нуль у будь-якому степені, відмінному від нуля, дорівнює нулю.

Запитання для самоконтролю
1. Як перемножити степені з однаковими основами?
2. Як знайти частку степенів з однаковими основами?
3. Чому дорівнює нульовий степінь числа?

4*. Подумай, чому не визначають 0^0.

Дивись відеоматеріали

76. Запиши у вигляді степеня добуток:

а) $x^8 \cdot x^2$;
б) $a \cdot a^6$;
в) $b^4 \cdot b^4$;
г) $7^{10} \cdot 7^5$;
ґ) $n^3 \cdot n^4 \cdot n^{10}$;
д) $k \cdot k^{17} \cdot k^4 \cdot k^2$;
е) $n^5 \cdot n^3 \cdot n \cdot n^8$;
є) $(a + b)^2 \cdot (a + b)^6$;
ж) $(m + n) \cdot (m + n)^5$.

77. Обчисли:

а) $2^2 \cdot 2^4$;
б) $3 \cdot 3^3$;
в) $4^2 \cdot 4$;
г) $(-5) \cdot (-5)^2$;
ґ) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2$;
д) $(-2)^3 \cdot (-2)^4$;
е) $10^2 \cdot 10^4$;
є) $(-10)^3 \cdot (-10)^2$;
ж) $0{,}1^2 \cdot 0{,}1$;
з) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2$;
і) $(-0{,}1)^2 \cdot (-0{,}1)^3$;
к) $4 \cdot 4^3$;
л) $(-6) \cdot (-6)^2$;
м) $(-0{,}7) \cdot (-0{,}7)^2$;
н) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

www.e-ranok.com.ua

78. Запиши у вигляді степеня частку:

а) $a^{23} : a^{17}$;
б) $b^9 : b$;
в) $b^{10} : b^{10}$;
г) $b^7 : b^2$;
ґ) $m^{25} : m^{18} : m$;
д) $(a + b)^{14} : (a + b)^{12}$.

79. Обчисли:

а) $3^5 : 3^3$;
б) $6^{27} : 6^{25}$;
в) $\dfrac{2^{17}}{2^{14}}$;
г) $\dfrac{(-4^{21})}{(-4^{18})}$;
ґ) $(-9)^{43} : (-9)^{42}$;
д) $1{,}5^{15} : 1{,}5^{15}$;
е) $10^5 : 10^2$;
є) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{19} : \left(-\frac{2}{3}\right)^{15}$;
ж) $(-10)^{16} : (-10)^{13}$;
з) $0{,}1^{30} : 0{,}1^{27}$;
і) $(-13)^{19} : 13^{19}$;
к) $\left(\frac{5}{6}\right)^{77} : \left(\frac{5}{6}\right)^{75}$.

80. Обчисли:

а) $3^3 \cdot 3 - 4^{10} : 4^7$;
б) $(-2)^3 \cdot (-2)^2 + 5^{12} : 5^{10}$;
в) $10^7 : 10^3 - 4 \cdot 4^2$;
г) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{5}{6}\right)^9 : \left(\frac{5}{6}\right)^7$;
ґ) $7^5 : 7^3 + (-2)^3 \cdot (-2)^4$;
д) $6^6 : 6^6 - (-7)^7 \cdot (-7)^7$;
е) $10 \cdot 10^3 - 5^{18} : 5^{14}$;
є) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{14} : \left(1\frac{1}{2}\right)^{11} + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$.

81. Заміни зірочку степенем з основою a так, щоб отримати правильну рівність:

а) $a^{11} \cdot * = a^{19}$;
б) $a^4 \cdot * \cdot a = a^{25}$;
в) $a^{13} : * = a^6$;
г) $* \cdot a^{18} = a^{23}$;
ґ) $* : a^7 \cdot a^{11} = a^{18}$;
д) $a^8 : * : a = a^3$.

82. Обчисли:

а) $3 \cdot (-2)^4 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot 3^{12} : 3^9$;
б) $3{,}2 \cdot 5^{15} : 5^{11} - 2{,}25 \cdot 2^2 \cdot 2$;
в) $64 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{20}{81} \cdot (-4)^8 : (-4)^7$;
г) $0{,}48 \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)^9 : \left(-1\frac{1}{2}\right)^5 - 3876 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1^2$.

www.e-ranok.com.ua

83. Запиши у вигляді степеня:

а) $x^2 \cdot x^m$;
б) $x^{16} : x^a$, $a \leq 16$;
в) $x^n : (x^{12} : x^{10})$, $n \geq 2$;
г) $x^{6n} : x^{2n} \cdot x^{3n+4}$;
ґ) $(x^7 \cdot x^{3n}) : (x^{2n} \cdot x^5)$;
д) $(x^{17} : x^{3n}) \cdot (x^8 : x^n)$.

84. Обчисли:

а) $5^9 \cdot 5^3 : 5^{10}$;
б) $11^{11} : 11^{10} \cdot 11$;
в) $\left(1\frac{11}{13}\right)^{17} : \left(1\frac{11}{13}\right)^{16} \cdot 1\frac{11}{13}$;
г) $\dfrac{7^{15} : 7^{12}}{7^2}$;
ґ) $3^2 \cdot 81$;
д) $256 : 2^5 \cdot 2^2$.

85. Знайди значення виразу $10^2 \cdot x^2 \cdot x^3 - 36 \cdot y^7 : y^6$, якщо:

а) $x = -\frac{1}{2}$ та $y = -\frac{1}{4}$;

б) $x = 0{,}3$ та $y = \frac{1}{9}$.

86. Обчисли:

а) $12 \cdot 3^3 - 120 \cdot (-6)^0 + 3 \cdot (-4)^{19} : (-4)^{16} - 2^2 \cdot 2^3$;

б) $(4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 2^0 \cdot (-2)^{18} : (-2)^{14}) \cdot (-5)^2 - 2^6 \cdot 10^{16} : 10^{14}$;

в) $\dfrac{72 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 81^0 \cdot \frac{4}{6^3} \cdot 5^2}{(-4)^{12} : (-4)^{10} + 0{,}009 \cdot 10^3}$;

г) $\dfrac{2 \cdot 5^5 : 5^3 - 3^0 \cdot 4 \cdot 4^2 \cdot 16^0}{6^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2^3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^2}$;

ґ) $\left(1\frac{1}{3} \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^2 - 3^3 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)\right) \cdot \left((-4)^{18} : (-4)^{14} - 2 \cdot 5^3\right)$.

www.e-ranok.com.ua

1.4. Піднесення до степеня з натуральним показником добутку, частки та степеня

Розглянемо числовий приклад:

$(2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216.$

Тепер, скориставшись означенням степеня, отримаємо:

$(2 \cdot 3)^3 = (2 \cdot 3)\,(2 \cdot 3)\,(2 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216.$

У загальному випадку, скориставшись означенням степеня і змінивши порядок множників у добутку, отримаємо:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ разів}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ разів}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ разів}} = a^n \cdot b^n.$$

Отже, $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

Щоб піднести до степеня з натуральним показником добуток, потрібно кожен множник піднести до цього степеня і перемножити отримані результати.

Приклад 1. а) $(3a)^3 = 3^3 \cdot a^3 = 27a^3$;

б) $(-5u)^4 = (-5)^4 \cdot u^4 = 625u^4$;

в) $(4xy)^2 = 4^2 \cdot x^2 \cdot y^2 = 16x^2y^2$;

г) $0{,}5^3 \cdot 2^3 = (0{,}5 \cdot 2)^3 = 1^3 = 1$.

Щоб піднести до степеня з натуральним показником частку, достатньо скористатися означенням степеня, тобто помножити відповідний дріб сам на себе потрібну кількість разів. При цьому чисельники та знаменники дробів перемножують окремо.

Наприклад: $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}.$

У загальному випадку отримаємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ разів}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ разів}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ разів}}} = \frac{a^n}{b^n},$$

тобто $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, якщо $b \neq 0$.

www.e-ranok.com.ua

Щоб піднести до степеня дріб, знаменник якого відмінний від нуля, потрібно піднести до зазначеного степеня чисельник та знаменник, а потім перший результат поділити на другий.

Приклад 2. а) $\left(\frac{x}{3}\right)^4 = \frac{x^4}{3^4} = \frac{x^4}{81}$;

б) $\left(\frac{2a}{5}\right)^3 = \frac{(2a)^3}{5^3} = \frac{2^3 \cdot a^3}{5^3} = \frac{8a^3}{125}$;

в) $\left(\frac{2a}{xy}\right)^5 = \frac{(2a)^5}{(xy)^5} = \frac{2^5 \cdot a^5}{x^5 \cdot y^5} = \frac{32a^5}{x^5 y^5}$;

г) $\left(-\frac{3}{8}\right)^3 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{8} : \frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3}\right)^3 = \left(-\frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$.

Якщо степеневі вирази ще раз піднести до якогось степеня, то отримаємо степінь у степені. Наприклад, у виразі $(a^3)^2$ куб основи треба піднести до квадрата. Розглянемо цей вираз як другий степінь з основою a^3. Тоді за означенням степеня отримаємо:

$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^6$.

Але, з іншого боку, a^3 можна розглядати як добуток трьох однакових співмножників і скористатися правилом піднесення до степеня добутку.

Отримаємо:

$(a^3)^2 = (a \cdot a \cdot a)^2 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3} = a^6$.

Таким чином, в обох випадках ми отримали той самий результат.

У загальному випадку, скориставшись тими самими означеннями і правилами, отримаємо:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ разів}} = \overbrace{a^{m+m+\ldots+m}}^{n \text{ доданків}} = a^{mn}.$$

Отже, $(a^m)^n = a^{mn}$.

Щоб піднести степінь до степеня, потрібно основу залишити тією самою, а показники степенів перемножити.

З отриманого правила випливає, що $(a^m)^n = (a^n)^m$, оскільки обидві частини цієї рівності дорівнюють a^{mn}.

www.e-ranok.com.ua

Приклад 3. а) $(x^3)^4 = x^{12}$;

б) $(2b^5)^2 = 2^2 \cdot b^{10} = 4b^{10}$;

в) $\left((a^3)^7\right)^{10} = (a^{21})^{10} = a^{210}$.

Отримані правила дозволяють спрощувати різні вирази, що містять степені з натуральним показником, та обчислювати їхні значення.

Підіб'ємо підсумки і наведемо **властивості степеня з натуральним показником**.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ m \geq n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$$

(m, n — натуральні)

Приклад 4. Обчислимо $\dfrac{3^7 \cdot 81^4}{9^{11}}$.

Розв'язання.

$$\frac{3^7 \cdot 81^4}{9^{11}} = \frac{3^7 \cdot (9 \cdot 9)^4}{(3^2)^{11}} = \frac{3^7 \cdot (3^2 \cdot 3^2)^4}{(3^2)^{11}} = \frac{3^7 \cdot (3^4)^4}{(3^2)^{11}} = \frac{3^7 \cdot 3^{16}}{3^{22}} = \frac{3^{23}}{3^{22}} = 3.$$

Відповідь: 3.

Приклад 5. Розв'яжемо рівняння $\dfrac{(x^3)^5 \cdot x^2}{x^{13} : x^6} = 5^{30}$.

Розв'язання.

Спростимо ліву частину рівняння:

$$\frac{x^{15} \cdot x^2}{x^7} = 5^{30};$$

$$\frac{x^{17}}{x^7} = 5^{30};$$

$$x^{10} = 5^{30}.$$

www.e-ranok.com.ua

Праву частину рівняння можна подати так: $5^{30} = (5^3)^{10} = (-5^3)^{10}$, тому
$x^{10} = (5^3)^{10}$ або $x^{10} = (-5^3)^{10}$;
$x = 5^3$ або $x = -5^3$;
$x = 125$ або $x = -125$.
Відповідь: -125; 125.

Запитання для самоконтролю

1. Як піднести до степеня добуток?
2. Як піднести до степеня дріб?
3. Чому дорівнює степінь степеня?

4*. Чому дорівнює добуток нульових степенів будь-яких множників?

Дивись відеоматеріали

87. Піднеси до степеня добуток:

а) $(2a)^4$;
б) $(6abc)^2$;
в) $(10ax)^3$;
г) $(6b)^2$;
ґ) $(-3xy)^0$;
д) $(-20st)^3$;
е) $(4x)^3$;
є) $(8uv)^2$;
ж) $(0{,}4xy)^2$.

88. Піднеси до степеня частку:

а) $\left(\frac{a}{4}\right)^3$;
б) $\left(\frac{2b}{3}\right)^4$;
в) $\left(-\frac{10a}{x}\right)^2$;
г) $\left(\frac{3x}{7}\right)^2$;
ґ) $\left(\frac{4x}{5y}\right)^0$;
д) $\left(-\frac{20}{st}\right)^3$;
е) $\left(\frac{x}{3y}\right)^3$;
є) $\left(\frac{-7u}{v}\right)^2$;
ж) $\left(\frac{5p}{8q}\right)^0$.

89. Піднеси степінь до степеня:

а) $(a^4)^5$;
б) $(a^2)^7$;
в) $(-2x^3)^3$;
г) $(b^8)^3$;
ґ) $(-x^6)^3$;
д) $(-u^7)^4$;
е) $(4a^5)^2$;
є) $(0{,}2b^4)^3$;
ж) $(-0{,}5y^2)^4$.

www.e-ranok.com.ua

90. Перетвори вираз на степінь добутку й обчисли:

а) $1{,}5^3 \cdot 4^3$;
б) $(-0{,}25)^8 \cdot 4^8$;
в) $2{,}5^4 \cdot 2^4$;
г) $6^3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^3$;
ґ) $0{,}5^4 \cdot 4^4$;
д) $(-3)^3 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)^3$;
е) $0{,}125^9 \cdot 8^9$;
є) $(-0{,}2)^5 \cdot 5^5$;
ж) $7^4 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^4$;
з) $(-0{,}4)^4 \cdot 10^4$;
і) $4{,}8^5 : 2{,}4^5$;
к) $5{,}6^2 : 8^2$;
л) $\left(\frac{4}{7}\right)^6 : \left(\frac{2}{7}\right)^6$;
м) $(8{,}5)^4 : (-1{,}7)^4$;
н) $(-7{,}2)^3 : (-2{,}4)^3$;
о) $(6{,}4)^5 : (0{,}8)^5$.

91. Обчисли:

а) $\frac{(2^3)^5 \cdot (2^4)^4}{(2^5)^4 \cdot (2^2)^5}$;
б) $\frac{(4^4)^2 \cdot (4^3)^6}{(4^5)^2 \cdot (4^2)^9}$;
в) $\frac{(-3^3)^8 \cdot (5^2)^7}{(5^4)^3 \cdot (3^{11})^2}$;
г) $\frac{(-6^4)^3 \cdot (2^7)^4}{(2^5)^5 \cdot (6^2)^5}$;
ґ) $\frac{(-7^3)^5 \cdot (7^8)^4}{(7^7)^3 \cdot (-7^4)^6}$;
д) $\frac{\left((-8)^9\right)^4 \cdot (3^2)^{13}}{(8^7)^5 \cdot \left((-3)^8\right)^3}$.

92. Обчисли:

а) $(1{,}4^2 + 0{,}54)^7 \cdot 0{,}4^7$;
б) $(0{,}4^3 - 0{,}008)^2 : 0{,}014^2$;
в) $(0{,}6^3 + 0{,}284)^5 \cdot 6^5$;
г) $\left(\frac{5}{7} + \frac{23}{35}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{16} - \frac{13}{48}\right)^3$;
г) $\left(\frac{4}{5} + \frac{4}{9}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{7}\right)^4$;
д) $\left(\frac{4}{15} + \frac{4}{25}\right)^3 : \left(1\frac{4}{5} + \frac{19}{25}\right)^3$.

93. Обчисли:

а) $\frac{2{,}6^3 \cdot 1{,}2^3}{(1{,}1^2 - 0{,}03)^3}$;
б) $\frac{3{,}9^4 \cdot 1{,}6^4}{(1{,}2^2 + 0{,}8^2)^4}$;
в) $\frac{(7{,}8 + 1{,}6^2)^5}{3{,}7^5 \cdot 1{,}4^5}$;
г) $\frac{(2{,}5 + 1{,}8^2)^6}{4{,}1^6 \cdot 2{,}8^6}$.

www.e-ranok.com.ua

94. Розклавши основу степеня на прості множники, запиши вираз у вигляді добутку степенів простих чисел:

а) 40^7; в) 36^5; г) 504^5;
б) 288^7; г) 150^4; д) 125^6.

95. Обчисли:

а) $\frac{9^5 \cdot 27}{3^{12}}$; в) $\frac{81^3 \cdot 27^2}{9^9}$; г) $\frac{4^5 \cdot 8^4}{2^{20}}$;

б) $\frac{18^6}{32 \cdot 27^4}$; г) $\frac{3^{16} \cdot 2^{10}}{54^5}$; д) $\frac{2^6 \cdot 6^{18}}{2^{25} \cdot 9^9}$.

96. Розв'яжи рівняння:

а) $x^5 = 32$; г) $x^3 = -8$; е) $(x - 2)^3 = 27$;
б) $x^7 = 1$; ґ) $x^4 = 81$; є) $(2x + 1)^4 = 0$;
в) $x^2 = 4$; д) $x^6 = -1$; ж) $(3 - x)^{2006} = 1$.

97. Розв'яжи рівняння:

а) $\frac{x^{15} \cdot (x^2)^{30}}{(x^5)^7 \cdot x^{33}} = 3^{28}$; в) $\frac{(x^2)^7 \cdot x^{20}}{(x^8)^3 \cdot x^3} = 2^{21}$;

б) $\frac{x^{12} \cdot (x^3)^{15}}{(x^5)^2 \cdot x^{25}} = 3^{44}$; г) $\frac{x^{23} \cdot (x^{40})^2}{(x^{18})^5 \cdot x^8} = 2^{25}$.

www.e-ranok.com.ua

1.5. Астрономічні числа

Ніхто, мабуть, не користується так широко дією піднесення до степеня, як астрономи. Дослідники Всесвіту на кожному кроці стикаються з величезними числами, що містять довгий ряд нулів. Зображення у звичайний спосіб таких числових велетнів, що їх слушно називають «астрономічними числами», неминуче призвело б до великих незручностей, особливо під час обчислень. Так, відстань від Землі до Сонця дорівнює 150 000 000 000 м, а відстань від Землі до туманності Андромеди, записана в кілометрах, має такий вигляд: 9 500 000 000 000 000 000.

Маси зірок і планет виражаються ще більшими числами, особливо якщо вимірювати їх, скажімо, у грамах. Наприклад:

маса Землі — 6 000 000 000 000 000 000 000 000 г;

маса Сонця — 1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000 г.

Уяви, як складно було б виконувати дії з такими громіздкими числами і як легко було б при цьому помилитися.

Дія піднесення до степеня дає простий розв'язок цієї проблеми. Одиниця, що супроводжується низкою нулів, являє собою певний степінь числа 10. Так, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $10\,000 = 10^4$ і т. д.

Отже, наведені вище числові велетні можна подати в такому вигляді:

відстань від Землі до Сонця: $1{,}5 \cdot 10^{13}$ см;

відстань від Землі до туманності Андромеди: $9{,}5 \cdot 10^{23}$ см;

маса Сонця: $1{,}983 \cdot 10^{33}$ г.

У розглянутих прикладах числа записано в так званому **стандартному вигляді**.

Стандартним виглядом числа називається його запис у формі добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \le a < 10$ і n — натуральне число.
Число n називається порядком числа.

Такий запис набагато зручніший, він суттєво полегшує обчислення. Якби треба було, наприклад, перемножити $9{,}5 \cdot 10^{23}$ та $1{,}983 \cdot 10^{33}$, то достатньо було б знайти добуток $9{,}5 \cdot 1{,}983 = 18{,}8385$ і поставити його попереду множника $10^{23} \cdot 10^{33} = 10^{56}$:

$9{,}5 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}983 \cdot 10^{33} = 18{,}8385 \cdot 10^{56} = 1{,}883\,85 \cdot 10^{57}$.

www.e-ranok.com.ua

Приклад 1. $3{,}5 \cdot 10^{18} + 12 \cdot 10^{18} = (3{,}5 + 12) \cdot 10^{18} = 1{,}55 \cdot 10^{19}$.

Приклад 2. $3{,}5 \cdot 10^{6} \cdot 4 \cdot 10^{13} = 3{,}5 \cdot 4 \cdot 10^{6} \cdot 10^{13} = 14 \cdot 10^{19} = 1{,}4 \cdot 10^{20}$.

Приклад 3. $6{,}2 \cdot 10^{12} : (2 \cdot 10^{10}) = \frac{6{,}2}{2} \cdot \frac{10^{12}}{10^{10}} = 3{,}1 \cdot 10^{2}$.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається стандартним виглядом числа?
2. Поясни, що називається порядком числа.

3*. Де застосовується запис числа з використанням степеня числа 10? Для чого? Наведи приклади.

98. Запиши число у вигляді добутку якомога меншого натурального числа та степеня числа 10:

а) 300 000 000;
б) 420 000 000 000;
в) 1 020 000 000 000 000;
г) 32 040 000 000 000;
ґ) 710 000 000 000 000 000;
д) 6 500 000 000 000.

99. Обчисли. Відповідь запиши в стандартному вигляді:

а) $6 \cdot 10^{18} - 2 \cdot 10^{18}$;
б) $5 \cdot 10^{8} \cdot 7 \cdot 10^{17}$;
в) $25 \cdot 10^{25} - 17 \cdot 10^{24}$;
г) $8 \cdot 10^{31} - 56 \cdot 10^{30}$;
ґ) $8 \cdot 10^{13} : (4 \cdot 10^{12})$;
д) $5{,}6 \cdot 10^{22} : (8 \cdot 10^{21})$.

100. Маса Землі дорівнює $6 \cdot 10^{24}$ кг, а маса Місяця — $7{,}4 \cdot 10^{22}$ кг. У скільки разів маса Землі більша за масу Місяця?

www.e-ranok.com.ua

101. Діаметр Землі дорівнює $12{,}8 \cdot 10^6$ м, діаметр Сонця — $1{,}4 \cdot 10^9$ м. У скільки разів діаметр Сонця більший за діаметр Землі?

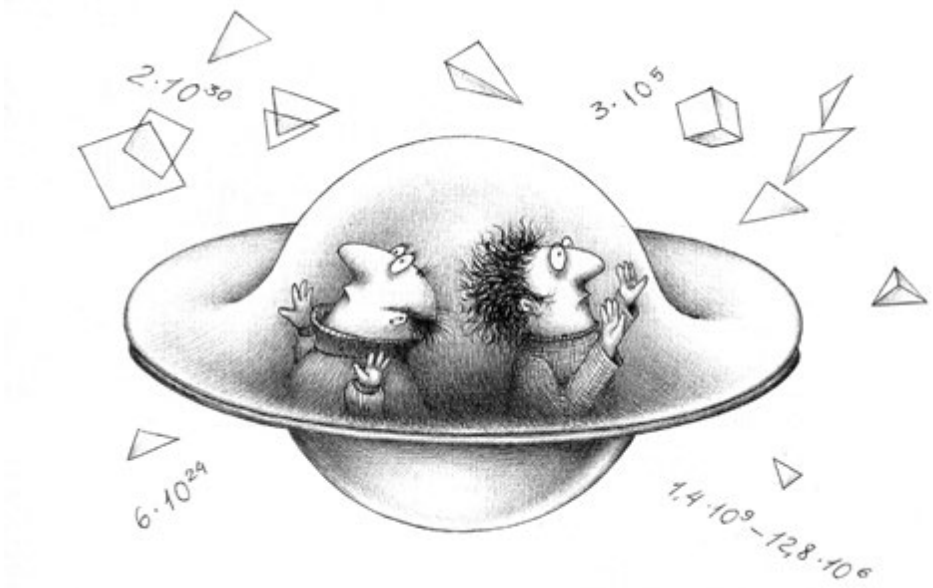
102. Маса Землі становить $6 \cdot 10^{24}$ кг, а маса Сонця — $2 \cdot 10^{30}$ кг. У скільки разів маса Сонця більша за масу Землі?

103. Обчисли. Відповідь запиши в стандартному вигляді.

а) $1{,}4 \cdot 10^8 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{17} - 18 \cdot 10^{23}$;
б) $3{,}8 \cdot 10^{16} + 4{,}9 \cdot 10^7 : (1{,}4 : 10^8)$;
в) $8{,}3 \cdot 10^{20} - 7 \cdot 10^{32} \cdot 2{,}8 : 10^{14}$.

104. Діаметр Землі дорівнює $12{,}8 \cdot 10^6$ м, а діаметр Місяця — $3{,}5 \cdot 10^6$ м. Скільки відсотків становить діаметр Місяця від діаметра Землі?

105. Швидкість світла дорівнює $3 \cdot 10^5$ км/с. Скільки кілометрів в одному світловому році, тобто яку відстань проходить світло за один рік? Запиши результат у кілометрах і метрах.



www.e-ranok.com.ua

Завдання для тематичного самоконтролю

1. Знайди значення виразу:

а) $2{,}5 \cdot 7^2 - 4^3$;

б) $\left(\frac{1}{2}y\right)^4$ при $y = -2$.

2. Подай у вигляді степеня:

а) $p^3 \cdot p^8$;

б) $q^7 : q^2$;

в) $(bd)^8$;

г) $\left(a^3\right)^4$.

3. Спрости вираз:

а) $b^6 \cdot b^{15} : b$;

б) $c^{10} : \left(c \cdot c^5\right)$;

в) $\left(\left(y^3\right)^3\right)^6$;

г) $\left(-x^4\right)^5 \cdot \left(-x^3\right)^4 : \left(x^2\right)^3$.

4. Знайди значення виразу:

а) $\frac{8^{15} \cdot 8^3}{8^{14} \cdot 8^4}$;

б) $\frac{3^6 \cdot 27^4}{81^4}$;

в) $\frac{200^4}{5^3 \cdot 2^4}$.

5. Розв'яжи рівняння:

а) $(6 - x)^7 = 0$;

б) $x^8 + 8 = 0$;

в) $x^2 = 225$.

6. Спрости вираз $x^8 \cdot \left(x^n\right)^6 : \left(x^{12} : x^3\right)^0 \cdot \left(x^4\right)^n$.

7. Розв'яжи рівняння $\frac{x^{18} \cdot \left(x^3\right)^5}{x^4 \cdot \left(x^5\right)^2 \cdot x^8} = 2^{33}$.

Пройди онлайн-тестування

www.e-ranok.com.ua

1.6. Одночлени. Множення та піднесення до степеня одночленів

Найпростішим видом алгебраїчного виразу є одночлен.

Одночленом називається вираз, який є добутком лише чисел, змінних та їх натуральних степенів.

Вирази, що складаються з одного числа або однієї змінної, також є одночленами. Наприклад:

$-\frac{2}{3}x$; $b \cdot 3a$; $5u^2v$; $0{,}5t$; $-1{,}3p^2ab^2c$; 12.

Одночленом стандартного вигляду називається такий одночлен, який містить тільки один числовий множник (коефіцієнт), що стоїть у його записі на першому місці, а інші множники є степенями різних змінних (степені зазвичай записують в алфавітному порядку змінних).

Для того щоб перемножити одночлени, перемножують окремо їхні коефіцієнти і окремо степені відповідних змінних, оскільки співмножники можна міняти місцями.

Приклад 1. а) $3a^2b \cdot (-4ab) = 3 \cdot (-4) \cdot a^2 \cdot a \cdot b \cdot b = -12a^3b^2$;
б) $-5x^2 \cdot 2xy = -5 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x \cdot y = -10x^3y$;
в) $2sx^2y \cdot 3tx^3y^2 = 6stx^5y^3$.

Ми вже стикалися з піднесенням одночлена до степеня, коли говорили про піднесення до степеня добутку.

Для того щоб піднести одночлен до степеня, потрібно піднести до цього степеня кожний з його множників, а отримані результати перемножити.

Приклад 2. а) $(2a^2bc)^3 = 2^3(a^2)^3b^3c^3 = 8a^6b^3c^3$;
б) $\left(-\frac{1}{3}xy^4z^2\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 x^4(y^4)^4(z^2)^4 = \frac{1}{81}x^4y^{16}z^8$;
в) $(-0{,}1ab^2)^5 = -0{,}000\,01a^5b^{10}$.

www.e-ranok.com.ua

Степенем одночлена називається сума степенів змінних, що входять до його складу.

Нуль — одночлен, степінь якого не визначений.

Наприклад, $3ab^3x^2y$ — одночлен 7-го степеня, $-2c$ — одночлен 1-го степеня, 3 — одночлен 0-го степеня.

Будь-яке відмінне від нуля число є одночленом нульового степеня.

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюй означення одночлена. Наведи приклади.
2. У якому випадку можна казати, що одночлен записано в стандартному вигляді?
3. Як перемножують одночлени?
4. Як піднести одночлен до степеня?
5. Що називається степенем одночлена?

6*. Чи є одночленом вираз $(2x^2y^3 + 4ab^4)^5$? Відповідь поясни.

Дивись відеоматеріали

106. Які з наведених виразів є одночленами?

а) x^3y^3;
б) -3;
в) a;
г) $(x - y)^4$;
ґ) $x^2 + y^2$;
д) $\frac{1}{3}a^2bc$;
е) $\frac{1}{2}aba^2b$;
є) $\frac{2}{x}$;
ж) $\frac{y^2}{x}$.

107. Які з наведених одночленів записано в стандартному вигляді?

а) $2a^2xyz^3$;
б) $-3ax^2a$;
в) $xy^3 \cdot 2a$;
г) $1\frac{1}{3}abcd^2$;
ґ) $0{,}2ab \cdot 0{,}3c^2$;
д) $(3ab)^2$.

www.e-ranok.com.ua

108. Запиши одночлен у стандартному вигляді й визнач його степінь:

а) $x \cdot \frac{1}{2}x$;
б) $6xyxxy$;
в) $-b \cdot \frac{1}{3}c^2 \cdot 2a$;
г) $5yxy$;
ґ) $a \cdot 4a^2 \cdot 3b$;
д) $x \cdot 6xa \cdot 3a^2$;
е) $4a(-3)a^2$;
є) $0{,}1u \cdot 100u^2$;
ж) $5x^2by(-\frac{1}{2})y$;
з) $1{,}2ba \cdot 5$;
і) $b \cdot 5a^2(-3)ba$;
к) $b \cdot 0{,}2a^3 \cdot 5b$;
л) $4yxxy$;
м) $zxy \cdot 3x$;
н) $t^2 \cdot 7ssts$.

109. Знайди значення одночлена $\frac{1}{4}ax^2$, якщо:

а) $a = -2$ та $x = -3$;
б) $a = 3$ та $x = 2$.

110. Виконай множення:

а) $2x \cdot (-3x)$;
б) $4x^2 \cdot (-3x)$;
в) $-7u^2 \cdot (-3u^2)$;
г) $-4y \cdot (-5y)$;
ґ) $5y \cdot (-2y^2)$;
д) $-8y^3 \cdot 2y^2$;
е) $8a \cdot (-7a)$;
є) $2x \cdot (-3y)$;
ж) $5xy \cdot (-3x)$;
з) $3b^3 \cdot 6b$;
і) $4a \cdot (-3b)$;
к) $-3ab \cdot (-9ab)$;
л) $12x \cdot (-5x)$;
м) $-9x^2 \cdot (-2x)$;
н) $-6a^2b^2 \cdot 7ab^2$;
о) $3a^3c^4 \cdot (-4a^2c^3)$.

111. Помнож одночлени:

а) $3ab \cdot (-4a^2b)$;
б) $(-x) \cdot (-3x^3) \cdot (-4x)$;
в) $2ax \cdot (-3bx) \cdot 2a$;
г) $-5x^2y \cdot (-3xy^4)$;
ґ) $2ax \cdot (-4a^2) \cdot (-2ax)$;
д) $-3a^2b \cdot 7b^2y \cdot (-2by^3)$;
е) $6a \cdot 4a^2 \cdot (-2a^3)$;
є) $4x^3y \cdot 5xy^2 \cdot 3y$;
ж) $\frac{1}{3}x^2\left(-\frac{3}{4}x^3\right) \cdot 2x$;
з) $\frac{5}{7}ax^2y \cdot \left(-2\frac{1}{3}a^3xy^2\right)$;
і) $3a^2b^3 \cdot (-2a^3) \cdot (-5b)$;
к) $-7ax^2y \cdot (-4ax^3y) \cdot 2a^2y$;
л) $\frac{1}{8}a^3x \cdot \frac{4}{5}aby \cdot (-3bx^4)$.

www.e-ranok.com.ua

112. Піднеси до степеня:

а) $(2a^2xy^3)^3$;

б) $(6s^2tp^4q^3)^3$;

в) $(-3x^2y^2)^2$;

г) $(-ab^2c)^5$;

ґ) $\left(\frac{4}{7}a^2b^3c^5\right)^2$;

д) $(-2x^4y^2z^6)^4$;

е) $(-3p^5x^2y^3)^3$;

є) $\left(\frac{1}{2}a^3x^4y^2\right)^7$;

ж) $(0{,}2a^2b^{10}c^4)^0$;

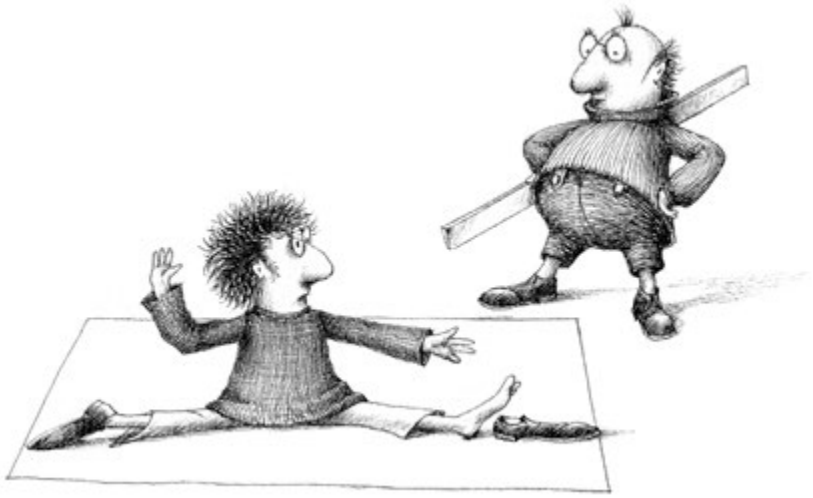
з) $(-0{,}01x^3y^5z)^2$.

113. Сторони прямокутника дорівнюють a і b.

а) Запиши у вигляді одночлена 43 % площі прямокутника.

б) Запиши у вигляді одночлена площу прямокутника, збільшену на 16 %.

в) Обчисли значення отриманих одночленів, якщо $a = 20$ см та $b = 30$ см.



114. Площа трикутника обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2}ah$, де a — основа трикутника, h — його висота.

а) Запиши у вигляді одночлена $\frac{2}{3}$ площі трикутника.

б) Запиши у вигляді одночлена площу трикутника, зменшену на 24 %.

в) Обчисли значення отриманих одночленів, якщо $a = 6$ м, $h = 5$ м.

www.e-ranok.com.ua

115. Сторона квадрата дорівнює a. Одну сторону квадрата збільшили в 1,5 разу, а другу зменшили на 40 %. Знайди площу отриманого прямокутника.

116. Виконай множення:

а) $\frac{2}{3}ax \cdot \left(-\frac{6}{7}a^2x\right) \cdot 21x^3 \cdot \left(-1\frac{1}{4}ax^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}a^3\right)$;

б) $-\frac{2}{9}x^2y^3(-3x^5) \cdot \frac{2}{5}xy(-15xy^4) \cdot \frac{1}{4}y^3$;

в) $-1{,}2a^2b(-3bx^2) \cdot 1{,}5ax^3(-0{,}7b^2x) \cdot 4ab$;

г) $3{,}2ax^3 \cdot 0{,}75axy^2 \cdot (-1{,}25a^3x^2y) \cdot 2x \cdot (-3ay)$;

ґ) $1{,}8b^2st \cdot (-2{,}1s^2t^3) \cdot (-4bs^2) \cdot 1{,}5b^2t \cdot (-0{,}5s^2t)$.

117. Запиши вираз у вигляді квадрата одночлена:

а) $4a^4$;

б) $16a^6b^2$;

в) $0{,}49a^8b^{10}$;

г) $324a^{10}b^{12}c^{16}$.

118. Запиши вираз у вигляді куба одночлена:

а) $8a^9$;

б) $-0{,}027a^9b^{30}$;

в) $-1000a^3b^{15}$;

г) $\frac{1}{64}a^{15}b^{27}c^{99}$.

119. Спрости вираз:

а) $5a^6 \cdot (-3a^2b)^2$;

б) $(-x^4y^3)^7 \cdot 8x^2y^5$;

в) $(-0{,}1a^2bc^5)^2 \cdot 100bc^4$;

г) $-1\frac{3}{5}m^4n^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}m^3p^6\right)^3$;

ґ) $2\frac{1}{4}a^5b \cdot \left(\frac{2}{3}ab^3\right)^3$;

д) $-(-5a^3b^7)^3 \cdot \left(-\frac{1}{5}a^2c^6\right)^2$.

www.e-ranok.com.ua

1.7. Многочлени. Додавання та віднімання многочленів

Многочленом називається сума одночленів.

Наприклад, многочленами є вирази $2a + 1$; $3x + y$; $x^2 - 3x + 5$; $-2a + 5ab + b^2$; $7a + 2ab + 10$.

Кожний з одночленів, що входять до многочлена, називають **членом многочлена**.

Одночлени, що входять до многочлена, називаються подібними членами многочлена, якщо вони мають однакову буквену частину.

Щоб дізнатися, чи є одночлени подібними, треба звести їх до стандартного вигляду.

Наприклад:
одночлени $3abab^2 = 3a^2b^3$ і $baab^2 = a^2b^3$ подібні;
серед одночленів a^2; b^2; b^3; 1; $3a^2b$; $3ab^2$ подібних немає.

Як ти вже знаєш, подібні одночлени можна додавати. Таке додавання називається **зведенням подібних доданків**.

Для того щоб звести подібні члени многочлена, потрібно скласти їхні коефіцієнти та помножити їх суму на однакову буквену частину.

Якщо подібних доданків у многочлені декілька, їх доцільно однаково підкреслити.

Приклад 1. а) $\underline{2x} - \underline{5x} + \underline{3} + \underline{6x} - \underline{7} = (2 - 5 + 6)x + 3 - 7 = 3x - 4$;

б) $\underline{8} - \underline{u^2} + \underline{3u} + \underline{5u^2} - \underline{12} + \underline{7} - \underline{u} =$
$= (5 - 1)u^2 + (3 - 1)u + 8 - 12 + 7 = 4u^2 + 2u + 3$;

в) $\underline{3ab} + a^2 - \underline{ab^2} - \underline{ab} + 4a^2b + \underline{5ab^2} =$
$= 2ab + a^2 + 4a^2b + 4ab^2$.

Одночлен є окремим випадком многочлена. Тому вирази a^5; $2ab$; $\frac{7}{3}$; $-\frac{5}{9}$; 0; a можна розглядати не тільки як одночлени, але і як многочлени.

Число нуль називають **нульовим многочленом**.

www.e-ranok.com.ua

Многочлен називають **многочленом стандартного вигляду**, якщо всі його члени записано в стандартному вигляді й серед них немає подібних.

Наприклад, многочлен $2a^3 - 3ab + b^2 + 11$ є многочленом стандартного вигляду.

Многочлен стандартного вигляду, що складається з двох членів, називають **двочленом**, з трьох — **тричленом** тощо.

Наприклад: $ab - cd$; $\frac{1}{3}a^2 - 2b$ — двочлени;

$3a - 2b - 7$; $x + yz - 2z^2$ — тричлени.

Будь-який многочлен можна звести до стандартного вигляду. Для цього необхідно кожен його член звести до стандартного вигляду та звести подібні члени.

Приклад 2. Зведемо многочлен до стандартного вигляду:

$$a^3 + 2aba + b^2a + ba^2 - 2abb - b^2b =$$
$$= a^3 + \underline{2a^2b} + \underline{\underline{b^2a}} + \underline{ba^2} - \underline{\underline{2ab^2}} - b^3 = a^3 + 3a^2b - ab^2 - b^3.$$

Степенем ненульового многочлена називається найбільший зі степенів одночленів, що входять до цього многочлена, коли його зведено до стандартного вигляду.

Наприклад, многочлен $-x^3yz - x + y^2$ має степінь 5, а многочлен $ab + c$ — степінь 2. Многочлен $2x - 5$ має степінь 1.

Можна також говорити про степінь многочлена відносно однієї зі змінних.

Наприклад, $2a - 3b + 7$ — многочлен першого степеня відносно a та b, а многочлен $ax^3 - a^2x^2 + 3$ є многочленом третього степеня відносно x.

Будь-яке число, відмінне від нуля, є многочленом нульового степеня. Нуль — єдиний многочлен, степінь якого не визначений.

Щоб додати многочлени, потрібно розкрити дужки з урахуванням знаків, а потім, якщо це можливо, звести подібні доданки.

Приклад 3. $(3a^2 - 3a + 5) + (4a - 2a^2 - 7) =$

$$= \underline{3a^2} - \underline{\underline{3a}} + \underline{\underline{\underline{5}}} + \underline{\underline{4a}} - \underline{2a^2} - \underline{\underline{\underline{7}}} = a^2 + a - 2.$$

www.e-ranok.com.ua

Щоб відняти многочлени, потрібно розкрити дужки, залишивши знаки зменшуваного без змін і змінивши знаки від'ємника на протилежні, а потім, якщо можна, звести подібні доданки.

Приклад 4. $(2x^2 - 3x + 5) - (x^2 - 5x - 1) =$
$= \underline{2x^2} - \underline{\underline{3x}} + \underline{\underline{\underline{5}}} - \underline{x^2} + \underline{\underline{5x}} + \underline{\underline{\underline{1}}} = x^2 + 2x + 6.$

При додаванні та відніманні многочленів треба користуватися відомими правилами розкриття дужок.

Приклад 5. $(2a^2 - 3) - (a^2 + 3a - 2) + (1 - a) =$
$= \underline{2a^2} - \underline{\underline{\underline{3}}} - \underline{a^2} - \underline{\underline{3a}} + \underline{\underline{\underline{2}}} + \underline{\underline{\underline{1}}} - \underline{\underline{a}} = a^2 - 4a.$

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюй означення многочлена.
2. Чи є одночлен многочленом?
3. Що таке нульовий многочлен?
4. Що потрібно зробити для того, щоб звести многочлен до стандартного вигляду?
5. Що називається степенем многочлена і чому дорівнює степінь нульового многочлена?
6. Як знайти суму двох многочленів?
7. Як знайти різницю двох многочленів?
8. Сформулюй правило розкриття дужок.

9*. Як узяти многочлен у дужки?

Дивись відеоматеріали

120. У яких із наведених многочленів немає подібних членів?

а) $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 1$;
б) $ba - a^2b - a^3b$;
в) $a^3b + ab^3 - a^2b^2 + 2bab^2$;
г) $a^2 - b^2 + 2ab + a^2 - ab$.

121. Зведи подібні члени многочлена:

а) $3 - x^2 + 5x - 3x + 4x^2 - 8 - 5x + 2$;

www.e-ranok.com.ua

б) $a^2 - 3 + 2a^3 - 7a + 9a^2 - a^3 + 9 + 11a$;
в) $2s - t - 13 + 21t - 9s - 6t + 4 + 3t$;
г) $x - 6x^2 - 6 + 3x^2 - x^2 + 2x - 7 + 3x$;
ґ) $3 + 4u^2 - 6uv - 9v + 8u^2 + 11v + 7uv$;
д) $2x^3 - 3xy + 7 - y^2 + 4xy - x^3 + 15$;
е) $5a^2 - 2 - 3a^2 + 7a + 9 - 22a + a^2 + 16a$;
є) $7xy - 3x + 8y + 14x - 12xy + y + xy$.

122. Зведи многочлен до стандартного вигляду й укажи його степінь:
а) $3a^2ab - 4a^2b^2b^2 - 6ab \cdot 2a + 5a^3b \cdot 0{,}4ab^3$;
б) $12x^2 \cdot 3yx - 2xy \cdot 3xy^3 + 12xyx$;
в) $4cc^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)ac + 15ab \cdot \frac{2}{3}ca^4$;
г) $4a^2b - 3abb - aab + 2ab^2$;
ґ) $x^2 + 4x - 5 + x^2 - 3x + 2$;
д) $10a - 6b + 5c - 4d + 9a - 2b - 8c - 2d$;
е) $2a^4 - 8a^3b - 2a^2b^2 - 4ab^3 - 3a^4 + 8a^3b + 9a^2b^2 + ab^3$.

123. Знайди суму або різницю многочленів:
а) $(3x - 7) + (5x - 9)$;
б) $(2a + 3) - (4a + 7)$;
в) $(7x - 3y) - (2x - 8y)$;
г) $(2b + 5) + (5b - 2)$.

124. Знайди суму або різницю многочленів:
а) $(2x - 3y + 5) - (3x - y - 4)$;
б) $(4a - 5b - 8) + (2a + 3b + 3)$;
в) $(3a - 4b + 6) - (3a + 2b + 6)$;
г) $(16 - x - 3y) - (3x - 3y + 15)$.

125. Спрости вираз:
а) $(6x - 3) - (4x - 3y) + (5y - 2) - (2y - 9x)$;
б) $(3a + b) - (8a - 5b) + (3a - b) - (7b - 3)$;
в) $(9a - 3b + 2) - (3b - 7a - 5) + (2a - 9b - 6)$;
г) $(3x - y - 3) + (4y - 5x + 6) - (9x - 8y - 16)$.

126. Спрости вираз:
а) $(2x^2 - 5x + 6) - (3x^2 - x + 5) - (3x - 2)$;
б) $(4b^2 - b + 6) - (-5b^2 + 3b + 7) - (2b^2 - 7b + 3)$;
в) $(3y^2 - 5y + 8) - (7y^2 + 2y - 9) + (y^2 - 3y - 12)$;
г) $(6x^2 - 7x + 3) + (5x^2 - 4x - 8) - (7x^2 - 11x - 5)$.

www.e-ranok.com.ua

127. Спрости вираз:

а) $(14ab^2 - 17ab + 5a^2b) + (20ab - 14a^2b)$;

б) $\left(\frac{7}{8}x^3y^2 - \frac{5}{6}xy^2\right) - \left(-\frac{7}{12}xy^2 + \frac{5}{12}x^3y^2\right)$;

в) $(2a^3 + 3a^2 - 4a + 5) - (4a^4 + 6a^3 - 2a^2 + 3a) + (7a^5 + 4a^3 - a^2 - 6)$;

г) $(x^3 + 4y^3) - (y^3 - 5xy + (3x^3 - (3y^3 + 6xy - 8x^3)))$.

128. Спрости вираз:

а) $(3x - 4) - (2x - (4x - 5))$;

б) $(3 - 5b) - (4b + (3 - b))$;

в) $(3a - (5a + 2)) - (7a + (3 - 4a))$;

г) $(16x - (8x - 3)) - (2x + (3 - 7x))$.

129. Спрости вираз:

а) $((2x - 7) - (3x + 8)) - ((6x + 1) - (2x - 7))$;

б) $((4x - 3y) - (x + 5y)) + ((9x - 2y) - (3x + 7y))$;

в) $((3a - 7) + (6 - 5a)) - ((6a - 4) - (a + 3))$;

г) $((5x - 2) - (3x + 8) - 6 - x) - (x - (3x + 4))$.

130. Доведи тотожність:

а) $-a^2 - (3 - 2a^2) + (7a^2 - 8) - (5 + 8a^2) + 16 = 0$;

б) $(x^3 + 2x^2) - (x + 1) - (x^2 - x) + (4 - x^3) = x^2 + 3$.

131. Доведи, що значення поданого виразу не залежить від значень змінних, які входять до нього:

$$\left(\frac{5}{6}a^2 - \frac{3}{8}ab\right) + \left(\frac{1}{4}ab - \frac{1}{3}a^2\right) - \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8}ab\right).$$

132. Розв'яжи рівняння:

а) $14 - (2 + 3x - x^2) = x^2 + 4x - 8$;

б) $(y^3 + 4y^2 - 6) - (5y - y^3 + 6) = 2y^3 + 4y^2 + y$.

133. Знайди значення виразу $(7xy - 3x^2) + 9x^2 - (6x^2 + 2xy)$, якщо $x = -1\frac{4}{15}$; $y = 2\frac{1}{19}$.

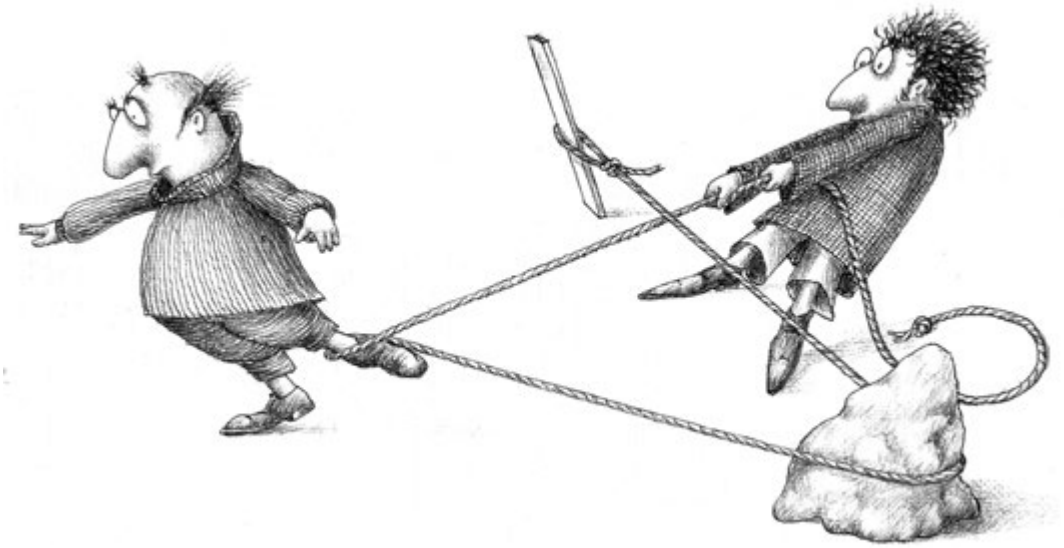
www.e-ranok.com.ua

134. Запиши суму трьох послідовних цілих чисел, якщо друге з них дорівнює a. Знайди ці числа, якщо їх сума дорівнює 171.

135. Запиши суму чотирьох послідовних цілих чисел, якщо друге з них дорівнює b. Знайди ці числа, якщо їх сума дорівнює 66.

136. Одна сторона прямокутника на 4 см менша за подвоєну другу його сторону. Вирази периметр прямокутника через довжину другої сторони. Знайди сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 46 см.

137. У трикутника друга сторона на 1 см коротша, ніж збільшена на 60 % перша, а третя сторона на 3 см довша, ніж збільшена на 40 % перша. Вирази периметр трикутника через першу сторону. Знайди сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 22 см.



138. Доведи, що сума n послідовних цілих чисел ділиться на n, якщо n — непарне число.

139. Доведи, що коли n — парне число і $n = 2k$, то сума n послідовних цілих чисел ділиться на k.

www.e-ranok.com.ua

1.8. Множення одночлена на многочлен

При множенні суми чисел на число діє розподільний закон, за яким кожен доданок помножується на це число й отримані добутки додаються:

$a(b + c) = ab + ac$.

Розподільний закон справедливий і стосовно віднімання:

$a(b - c) = ab - ac$.

Оскільки многочлен є сумою одночленів, то має місце таке правило.

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно помножити цей одночлен на кожний член многочлена і отримані добутки додати.

Виведене правило можна також назвати **правилом розкриття дужок**. Цим правилом можна користуватися при додаванні та відніманні многочленів. Знак «плюс» перед дужкою позначає множення многочлена на число 1, а знак «мінус» — множення на число -1.

Приклад 1. а) $-(2x^2 - 5x - 3) = -1 \cdot 2x^2 - 1 \cdot (-5x) - 1 \cdot (-3) = -2x^2 + 5x + 3$;

б) $5(2x - 3) - 4(x + 6) = 10x - 15 - 4x - 24 = 6x - 39$;

в) $-2x^2(4x^2 - x + 7) = -8x^4 + 2x^3 - 14x^2$;

г) $-1{,}5a^2b(4ax - 2b^2) = -6a^3bx + 3a^2b^3$;

ґ) $3u^3v(2u^2 - 4uv^2 + 5uv - v^3) = 3u^3v \cdot 2u^2 + 3u^3v(-4uv^2) + 3u^3v \cdot 5uv + 3u^3v \cdot (-v^3) = 6u^5v - 12u^4v^3 + 15u^4v^2 - 3u^3v^4$.

Запитання для самоконтролю

1. Як помножити одночлен на многочлен?
2. На підставі якого закону виведено правило множення одночлена на многочлен?
3. Як користуються цим правилом при додаванні та відніманні многочленів?

4*. Подумай, як розділити многочлен на одночлен.

Дивись відеоматеріали

www.e-ranok.com.ua

140. Виконай множення:

а) $4(2x - 5)$;
б) $a(x - 5)$;
в) $5(2x^2 - x + 2)$;
г) $3(4x + 3)$;
ґ) $-2a(y + z)$;
д) $-3(y^2 - 2y + 6)$;
е) $-5(2a - 1)$;
є) $x(3x - 2)$;
ж) $-4(2x - 3y + 1)$;
з) $-2(3y - a)$;
і) $-4x(x - 6)$;
к) $8(3a + b^2 - 7)$;
л) $7(2x - 3y)$;
м) $3a(5 - 2a)$;
н) $-2(3x - 2y + z - 5)$;
о) $-b(2a + c^2 - d^3 + 4)$.

141. Розкрий дужки та спрости:

а) $2(3x + 5y) + 3(x + 8y)$;
б) $6a(a + 2b) - 3b(4a + b)$;
в) $4u(0{,}6v - 5u) - 0{,}2v(3u - v)$;
г) $3x^3y(2x + 9y) - 6xy(x^3 - 7y)$;
ґ) $9u^3v^2(u - 3v^2) - 3u^2v^2(3u^2 + 6uv^2)$;
д) $5s^2t(7t^2 - 8s) - 8s(2st^3 + 3s^2t)$;
е) $8xy^2(2x^3 - x^2y^2) - 5x^3y(6xy - 7y^3)$;
є) $2a^2b(5b - 6ac) + 6abc(2a^2 + 3b^2)$.

142. Перетвори на многочлен вираз:

а) $\frac{1}{2}(x - 2y) - \frac{1}{6}(3x + y)$;

б) $\frac{1}{2}u(3u + 4v) - \frac{2}{3}v(3u - 5v)$;

в) $\frac{1}{7}a(2a + 7b) - \frac{1}{2}b(2a - 9b)$;

г) $\frac{2}{3}xy(6x - y) + \frac{1}{2}x^2(7 - 8y)$;

www.e-ranok.com.ua

г) $\frac{1}{4}a^2(4a^2b - 9b^2) - \frac{1}{5}ab(5a^3 + 6ab)$;

д) $1\frac{1}{5}x^2y(2x + 4y^3) - 1\frac{1}{2}xy(3x^2 - 4xy^3)$;

е) $\frac{8}{9}uv(5u^2v - 3uv^2) - \frac{2}{3}u^2v^2(7u - 4v)$;

є) $\frac{1}{4}x\left(4x + \frac{1}{6}y\right) - \frac{1}{3}y\left(\frac{1}{8}x - 3y\right)$.

143. Спрости вираз:

а) $3x(4x + 5y^2) - 2y^2(6x + 4y) + 4(2y^3 - 3x^2)$;

б) $6x(2y - x) - 4xy(2x - 2 + 3x^2) + 6x^2(2xy + 1) - 20xy$.

144. Розв'яжи рівняння:

а) $3(7x - 2) + 2(5 - 2x) = 38$;

б) $8(3x + 4) - 7(4x - 1) = 43$;

в) $2x(3 - 4x) + 4(2x^2 - x + 1) = 4$;

г) $5(2x^2 - x + 3) - 2x(5x - 6) = 1$.

145. Спрости вираз:

а) $1{,}2xy^2(x + 7y) - 0{,}3y^2(4x^2 - 17xy)$;

б) $\frac{2}{3}u^2(3u - v^2 + 6v) + \frac{1}{2}uv(3uv^2 - 4u^2 - 8uv)$;

в) $\frac{1}{2}st^2(3s^2t - 12s - 5s^2) + \frac{3}{4}s^2t^2(8 - 2st + 3s)$;

г) $0{,}3xy(5x^2 - 2x + 4y) - 0{,}6y(2xy - x^2 + y^2)$;

г) $\frac{1}{2}u^3v(uv - 2uv^2 + 2v^3) - \frac{1}{10}uv^2(10u^2v^2 - 10u^3v + 2u^3)$;

д) $\frac{1}{2}a^2b(6b^2 - 4ab^2) - \frac{1}{3}b^3(9a^2b^2 - 6a^3 - 3a)$.

www.e-ranok.com.ua

146. В одному бідоні було в 4 рази більше молока, ніж у другому. Після того як з першого бідона перелили в другий 20 л молока, виявилося, що кількість молока в другому бідоні становить $\frac{7}{8}$ того, що залишилося в першому. Скільки літрів молока було в кожному бідоні спочатку?

147. З двох пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 10 км, у протилежних напрямках одночасно виїхали велосипедист і вантажівка. Швидкість вантажівки на 30 км/год більша за швидкість велосипедиста. Через 36 хв після початку руху відстань між ними була 40 км. Знайди швидкість велосипедиста.

148. Найвища радіощогла у світі — Варшавська радіощогла (Польща), її висота дорівнює 646,38 м. Нижча за неї радіощогла «Небесне дерево Токіо» (Японія). Її висота становить приблизно 98,08 % висоти Варшавської радіощогли. Визнач висоту телевізійної вежі «Сі-Ен-Тауер» у Торонто (Канада), яка приблизно на 12,776 % нижча за радіощоглу «Небесне дерево Токіо». Склади відповідний вираз та знайди його значення (відповідь округли до одиниць).

www.e-ranok.com.ua

Завдання для тематичного самоконтролю

1. Перетвори на одночлен стандартного вигляду:

а) $-3{,}5k(-0{,}2)k^4n^7$;

б) $(-3a^3b^6)^5$.

2. Спрости вираз:

а) $2y(y-7)+(y^2-4)-(3-y)$;

б) $3z^4(-2x^2)-7z^2x^3\cdot 5z$;

в) $4x^5(x-3)-x^2(-5x+3x^2-6x^3)$.

3. Розв'яжи рівняння:

$2x^2(3-4x^2)-4x^3(x^3-2x)-6x^2-12=0$.

4. Скільки років учню, якщо відомо, що через 10 років він буде у 5 разів старший, ніж 10 років тому?

5. Спрости вираз $5x^m-2{,}5xy-x^{m-1}(3x-x^{2-m}y)$.

6. Знайди двоцифрове число, у якого число десятків на 5 більше за число одиниць, а сума цифр дорівнює 9.

Пройди онлайн-тестування

www.e-ranok.com.ua

1.9. Множення многочлена на многочлен

Для отримання правила множення многочлена на многочлен скористаємося правилом розкриття дужок. Для прикладу розглянемо добуток двочленів $(a + b)(c + d)$. Розкриємо спочатку перші дужки, вважаючи $(c + d)$ за множник. Отримаємо:

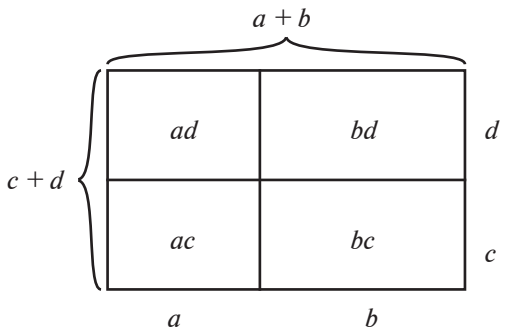
$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$.

Розкриємо дужки ще раз:

$a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Отже, $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Щоб проілюструвати цей приклад, розглянемо прямокутник зі сторонами $(a + b)$ та $(c + d)$. Його площа дорівнює $(a + b)(c + d)$.



З рисунка видно, що цей прямокутник розбито на чотири прямокутники, площі яких дорівнюють ac, ad, bc і bd, тобто отримуємо:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Виведена формула показує, що кожен член першого многочлена потрібно помножити на кожен член другого многочлена, а потім добутки додати. Неважко помітити, що ця формула справедлива при множенні не тільки двочленів, але й будь-яких многочленів.

Наприклад:

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be.$$

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожен член одного многочлена помножити на кожен член іншого многочлена й отримані добутки додати.

www.e-ranok.com.ua

Приклад 1. $(3x - 5)(2x + 3) = 6x^2 + 9x - 10x - 15 = 6x^2 - x - 15.$

Приклад 2. $(2a - 3)(a^2 + 4) = 2a^3 + 8a - 3a^2 - 12.$

Приклад 3. $(2x + 1)(x^2 - 3x - 5) = 2x^3 - 6x^2 - 10x + x^2 - 3x - 5 = 2x^3 - 5x^2 - 13x - 5.$

Приклад 4. $(2u - v)(3v - 5u + 2) = 6uv - 10u^2 + 4u - 3v^2 + 5uv - 2v = 11uv - 10u^2 - 3v^2 + 4u - 2v.$

Приклад 5. $(4b + 3)(2b^2 - 1) - 5(3b^2 + 2) = 4b \cdot 2b^2 - 4b + 3 \cdot 2b^2 - 3 - 5 \cdot 3b^2 - 10 = 8b^3 - 4b + 6b^2 - 3 - 15b^2 - 10 = 8b^3 - 9b^2 - 4b - 13.$

Запитання для самоконтролю

1. Як помножити многочлен на многочлен?
2. Виведи формулу множення тричлена на тричлен.
3*. Проілюструй правило множення двочлена на тричлен, використовуючи площі прямокутників.

Дивись відеоматеріали

149. Виконай множення та спрости вираз:

а) $(x + 7)(x + 2)$;
б) $(b - 5)(b + 12)$;
в) $(2t - 3)(3t - 1)$;
г) $(2x + 3)(3x - 1)$;
ґ) $(3x + 5)(4x - 7)$;
д) $(4z + 7)(5 - 2z)$;
е) $(a + 5)(7a - 6)$;
є) $(2y - 9)(7y + z)$;
ж) $(8a - 3)(2a + 5)$;
з) $(4 - 3x)(6x + 5)$;
і) $(5x + 6)(3x - 7)$;
к) $(2y - 5)(6 - 7y)$.

www.e-ranok.com.ua

150. Виконай множення та спрости вираз:

а) $(3x - 2y)(4x + 5y)$;
б) $(2x + y)(6x - 7y)$;
в) $(4a + 3b)(6a - 7b)$;
г) $(3a + 5b)(5b - 8a)$;
ґ) $(2s^2 + 7st)(5s^2 - st)$;
д) $(4s^2 + st)(8st + s^2)$;
е) $(9uv - 2v^2)(u + 3v)$;
є) $(u + 7v)(3v^2 - 4uv)$.

151. Виконай множення та зведи подібні доданки:

а) $(2x - 3)(x - 1) + 3(5x - 7)$;
б) $(x - 3)(x^2 - 2x + 5)$;
в) $(2a - 7)(3 - a) - 4a(3 - a)$;
г) $(2x^2 - 7x + 6)(3x - 1)$;
ґ) $(3x + 1)(5x - 2) - 5x(2x - 1)$;
д) $(3a - 4)(a - 4a^2 - 11)$;
е) $(2 - 5y)(3y - 4) + 6(2y - 3)$;
є) $(7u + 2)(2u + 3u^2 - 6)$.

152. Спрости вираз:

а) $(2x - 5)(3x + 4) - (4x - 3)(7x + 2)$;
б) $(4a - b)(3a + b) - (5a - 3b)(2a - 3b)$;
в) $(8x^2 - 7)(3x^2 + 1) + (7x^2 - 5)(2x^2 + 3)$;
г) $(9x - y)(2x + 3y) - (5x - 2y)(6x + 7y)$.

153. Розв'яжи рівняння:

а) $(x + 5)(x - 1) - (x + 2)(x - 3) + 9 = 0$;
б) $(2x + 1)(2x + 1) + (x + 3)(1 - 4x) + 17 = 0$;
в) $(9x - 2)(x + 3) - (3x - 1)(3x + 1) = 95$;
г) $(8x + 10)(3 - x) = (11 - 2x)(4x + 5)$.

154. Спрости вираз і знайди його значення:

а) $(x - 2)(x + 5) - (x + 3)(x - 4)$, якщо $x = -4{,}5$;

б) $(a - 6)(a + 1) + (2 - a)(3 + 4a)$, якщо $a = -1\frac{1}{3}$.

155. Доведи, що значення виразу $(2x - 3)(2x + 3) - 4x^2 + 12$ не залежить від значення змінної x.

156. Доведи, що значення виразу $(3a - 1)(9a + 4) - 3(9a^2 + a)$ не залежить від значення змінної a.

www.e-ranok.com.ua

157. Спрости вираз:

а) $(3x^2 - x - 2)(x + 3) - (2x - 1)(3x + 5)$;

б) $(2a^2 - 5a + 6)(2a - 1) + (4a + 3)(2a - 7)$;

в) $(3y - 2)(6y + 5) - (4y + 1)(5y - 3) + 2y(y - 5)$;

г) $(a^2 - 2a - 7)(a + 3) - (2a^2 - 4a + 5)(3a - 1)$;

ґ) $(2u^2 - 3u - 6)(2u - 3) + (3u^2 + u + 5)(4 - 5u)$.

158. Розв'яжи рівняння:

а) $(4x + 5)(2x - 1) - (3x + 2)(2x - 3) + (x + 6)(7 - 2x) = 1$;

б) $(5x + 2)(5x + 2) + (8x + 3)(7 - 2x) - (x + 4)(9x - 1) + 6 = 0$;

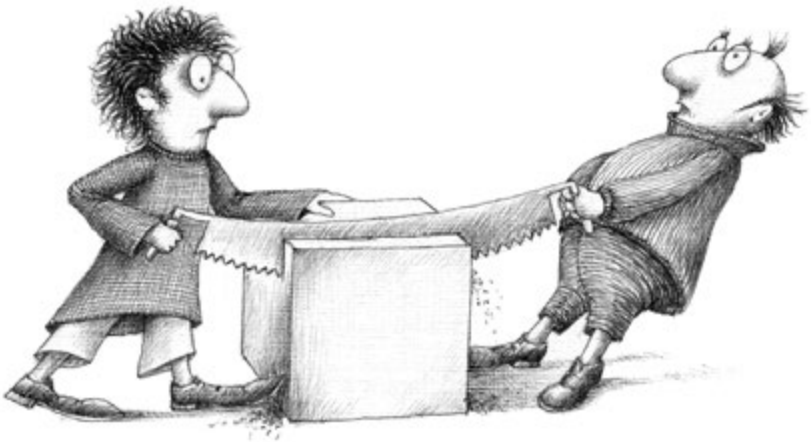
в) $(6x + 1)(3 - 4x) + (14x - 5)(4x - 9) - (4x - 1)(8x + 5) + 19 = 0$;

г) $(5x - 3)(5x + 3) - (2x + 7)(6x - 1) + (x + 2)(1 - 13x) + 13 = 0$;

ґ) $(3 + 4x)(3 - 7x) + (6x + 5)(7x - 2) - (2x - 5)(7x + 1) + 90 = 0$.

159. Добуток двох послідовних цілих чисел на 60 менший, ніж добуток збільшених на 5 даних чисел. Знайди ці числа.

160. Деяке число зменшили на 20 %, від нового числа відняли 6. Отриману різницю помножили на суму числа 2 й 60 % від початкового числа. Отриманий добуток виявився на 60 менший, ніж зменшений на 52 % квадрат початкового числа. Знайди початкове число.



www.e-ranok.com.ua

1.10. Формула різниці квадратів двох виразів

Помножимо суму двох виразів на їх різницю:

$(a + b)(a - b) = a \cdot a - ab + ba - b \cdot b = a^2 - b^2$.

Отриману формулу називають **формулою різниці квадратів,** вона є однією з **формул скороченого множення**.

Добуток суми двох виразів на їх різницю дорівнює різниці квадратів цих виразів:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Приклад 1. а) $(2x - 3)(2x + 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$;
б) $(5a - 2b)(5a + 2b) = 25a^2 - 4b^2$;
в) $(x^2 - 6y)(x^2 + 6y) = (x^2)^2 - (6y)^2 = x^4 - 36y^2$.

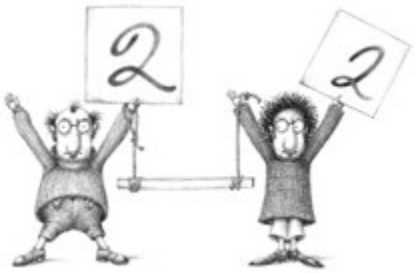
Змінивши місцями праву та ліву частини формули різниці квадратів, ми можемо розкласти різницю квадратів на множники:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Приклад 2. а) $9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x - 5)(3x + 5)$;
б) $16x^4y^2 - 81a^2 = (4x^2y)^2 - (9a)^2 = (4x^2y - 9a)(4x^2y + 9a)$.

У деяких випадках це дає змогу спростити обчислення.

Приклад 3. а) $2{,}7^2 - 1{,}3^2 = (2{,}7 - 1{,}3)(2{,}7 + 1{,}3) = 1{,}4 \cdot 4 = 5{,}6$;
б) $43^2 - 33^2 = (43 + 33)(43 - 33) = 76 \cdot 10 = 760$;
в) $41 \cdot 39 = (40 + 1)(40 - 1) = 40^2 - 1^2 = 1600 - 1 = 1599$.



Запитання для самоконтролю

1. Виведи формулу різниці квадратів.
2*. Як можна застосувати формулу різниці квадратів для спрощення обчислень?

Дивись відеоматеріали

www.e-ranok.com.ua

161. Запиши множники у вигляді суми й різниці одних і тих самих чисел і обчисли добуток:

а) $21 \cdot 19$;
б) $25 \cdot 35$;
в) $14 \cdot 16$;
г) $32 \cdot 28$;
ґ) $37 \cdot 23$;
д) $56 \cdot 44$.

162. Виконай множення:

а) $(a - 2)(a + 2)$;
б) $(2x - 1)(2x + 1)$;
в) $(x - 5)(x + 5)$;
г) $(-4 + 3a)(3a + 4)$;
ґ) $(y + 10)(y - 10)$;
д) $(5u + 8)(5u - 8)$;
е) $(6y + 7)(6y - 7)$;
є) $(x - 9)(x + 9)$;
ж) $(3 - 8a)(8a + 3)$.

163. Запиши вираз у вигляді многочлена:

а) $(2x - 3y)(2x + 3y)$;
б) $\left(\frac{1}{7}x + \frac{1}{6}y\right)\left(\frac{1}{7}x - \frac{1}{6}y\right)$;
в) $\left(\frac{ax}{2} + \frac{by}{5}\right)\left(\frac{ax}{2} - \frac{by}{5}\right)$;
г) $(11a + 9b)(-9b + 11a)$;
ґ) $(7x + 12y)(7x - 12y)$;
д) $(xy + 2a)(xy - 2a)$;
е) $(7b + 4a)(7b - 4a)$;
є) $\left(\frac{u}{13} - \frac{v}{8}\right)\left(\frac{u}{13} + \frac{v}{8}\right)$.

164. Розклади на множники:

а) $4x^2 - 49$;
б) $64x^2 - 121y^2$;
в) $64a^2 - 81$;
г) $144 - 25s^2$;
ґ) $36a^2 - 225b^2$;
д) $\frac{1}{36} - \frac{y^2}{49}$;
е) $\frac{u^2}{169} - 49v^2$;
є) $-16t^2 + 25$;
ж) $\frac{a^2}{9} - \frac{4}{b^2}$;
з) $\frac{a^2b^2}{100} - 81$.

165. Спрости вираз:

а) $(3a + 4b)(3a - 4b) - (2a - 5b)(2a + 5b)$;
б) $(9x + 4y)(9x - 4y) - (-7y + 6x)(7y + 6x)$;

www.e-ranok.com.ua

в) $\left(7b + \frac{y}{6}\right)\left(7b - \frac{y}{6}\right) - \left(\frac{1}{2}a - 9b\right)\left(\frac{1}{2}a + 9b\right)$;

г) $\left(11x - \frac{y}{6}\right)\left(\frac{y}{6} + 11x\right) - \frac{y}{4}\left(4x - \frac{y}{9}\right)$.

166. Виконай множення:

а) $(4x^2 + 9)(-9 + 4x^2)$;

б) $(10x^2y + 3u^2)(10x^2y - 3u^2)$;

в) $(7c^2 + 5ab^2)(5ab^2 - 7c^2)$;

г) $\left(\frac{u^2}{6} - \frac{v^2}{11}\right)\left(\frac{u^2}{6} + \frac{v^2}{11}\right)$;

ґ) $\left(3ab + \frac{cd}{8}\right)\left(\frac{cd}{8} - 3ab\right)$;

д) $\left(\frac{5}{7}y^2z^2 + \frac{4}{3}x^3\right)\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{7}y^2z^2\right)$.

167. Розклади на множники:

а) $64a^6b^2 - 49c^8$;

б) $-0{,}36y^4 + 1{,}21x^2$;

в) $25x^{10} - 81y^2z^4$;

г) $1{,}44s^4 - 0{,}81t^2$;

ґ) $36u^4v^4 - 121t^6$;

д) $-3{,}61 + 0{,}49a^2b^2$;

е) $0{,}01x^2y^2 - \frac{1}{9}a^2b^4$;

є) $0{,}64a^8 - \frac{9}{49}b^4$;

ж) $0{,}25y^6 - 1{,}21z^4$.

168. Спрости вираз:

а) $(0{,}2a^2 - 1{,}2b)(0{,}2a^2 + 1{,}2b) - 4b^2(3a - 0{,}6)(0{,}6 + 3a)$;

б) $(0{,}8xy + 1{,}1)(1{,}1 - 0{,}8xy) - 0{,}2x^2(20 - 3{,}2y^2)$;

в) $(4z + 0{,}9x^2y)(0{,}9x^2y - 4z) - 0{,}09x^4(3y - 2)(3y + 2)$;

г) $(0{,}7a - 0{,}8b^2c)(0{,}8b^2c + 0{,}7a) + 0{,}16b^2(a + 2bc)(2bc - a)$.

169. Спрости вираз:

$(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$.

170. Розв'яжи рівняння:

а) $x^2 - 64 = 0$;

б) $4x^2 - 25 = 0$;

в) $9x^2 + 16 = 0$;

г) $(2x - 3)^2 - 36 = 0$.

www.e-ranok.com.ua

1.11. Квадрат двочлена

Квадрат двочлена утворюється при множенні цього двочлена самого на себе.

Розглянемо квадрат суми й перетворимо його, скориставшись правилом множення многочленів:

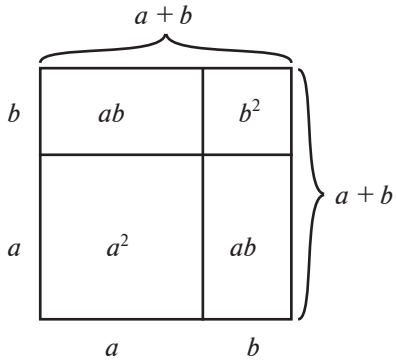
$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Отриману формулу називають **формулою квадрата суми**.

Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого виразу на другий плюс квадрат другого виразу:

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.}$$

Цю формулу можна проілюструвати, розглянувши квадрат зі стороною $(a + b)$ (див. рисунок).



Площа квадрата дорівнює $(a + b)^2$. Сума площ його частин дорівнює $a^2 + 2ab + b^2$.

Аналогічно виводиться **формула квадрата різниці**:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого виразу на другий плюс квадрат другого виразу:

$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.}$$

Приклад 1. а) $(3x - 4)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16$;

б) $(5a^2 + 2b)^2 = (5a^2)^2 + 2 \cdot 5a^2 \cdot 2b + (2b)^2 = 25a^4 + 20a^2b + 4b^2$.

Змінивши місцями праву та ліву частини отриманих формул, одержимо запис тричлена у вигляді квадрата двочлена.

www.e-ranok.com.ua

Приклад 2. а) $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$;
б) $25a^2 - 40a + 16 = (5a)^2 - 2 \cdot 5a \cdot 4 + 4^2 = (5a - 4)^2$.

Приклад 3. $33^2 = (30 + 3)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 3 + 3^2 = 900 + 180 + 9 = 1089$.

Формули квадрата суми та квадрата різниці також є **формулами скороченого множення**.

Усі виведені нами формули скороченого множення є тотожностями.

Запитання для самоконтролю

1. Виведи формулу квадрата суми.
2. Виведи формулу квадрата різниці.
3*. Придумай геометричну ілюстрацію до формули квадрата різниці.

Дивись відеоматеріали

171. Запиши вираз у вигляді многочлена:

а) $(a + 1)^2$;
б) $(2x + 3)^2$;
в) $(2x - 7)^2$;
г) $(x - 3)^2$;
ґ) $\left(u + \frac{1}{6}\right)^2$;
д) $(4a + 3b)^2$;
е) $(y + 4)^2$;
є) $(4z + 5)^2$;
ж) $(6u - 5v)^2$;
з) $\left(\frac{1}{5}t + \frac{1}{2}\right)^2$;
і) $(2u - 7)^2$;
к) $(8s + 3t)^2$;
л) $(z - 5)^2$;
м) $(3y - 1)^2$;
н) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y\right)^2$.

172. Обчисли квадрат числа, записавши це число у вигляді суми або різниці:

а) 21^2;
б) 32^2;
в) 19^2;
г) 27^2;
ґ) 31^2;
д) 52^2;
е) 28^2;
є) 33^2;
ж) 41^2;
з) 29^2;
і) 18^2;
к) 48^2.

www.e-ranok.com.ua

173. Спрости вираз:

а) $(2a + 1)^2 - (2a - 1)^2$;

б) $(3a + b)^2 - (a + 3b)^2$;

в) $(3 + 2x)^2 - 4(x - 2)^2$;

г) $(y - 4x)^2 + (x + 3y)^2 - 17x^2 - 10y^2$;

ґ) $(y + 5)^2 + (-5 + y)^2$;

д) $(-3b - 4)^2 - 6(b + 2)^2$;

е) $(5 - 4u)^2 - 16(u - 3)^2 - 56u$;

є) $(10x - 3y)^2 - (6y - 5x)^2 - 50x^2$.

174. Спрости вираз:

а) $(2x - 3)^2 + 4x(2x - 3)$;

б) $(7a - 10)(4a - 7) - (7 - 4a)^2$;

в) $2(3u + 1)^2 - 7(2 + 6u) + (4u + 2)(1 + 3u)$;

г) $(9t + 33)(4t - 5) + 3(5 - 4t)^2 - 7t(12t - 15)$;

ґ) $(5y + 2)^2 - (2 + 5y)(3y - 8) - 2(25y + 10)$.

175. Запиши вираз у вигляді квадрата двочлена:

а) $x^2 + 4x + 4$;

б) $12a + 4a^2 + 9$;

в) $36 - 12a + a^2$;

г) $\frac{2}{7}x + \frac{1}{49} + x^2$;

ґ) $36u^2 - 3u + \frac{1}{16}$;

д) $x^2 - 14x + 49$;

е) $9u^2 - 48u + 64$;

є) $40b + 16 + 25b^2$;

ж) $\frac{1}{9} - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}b^2$;

з) $\frac{1}{49}x^2 - \frac{2}{7}x + 1$.

176. Спрости вираз:

а) $(x + 5)^2 + (-3 - 2x)^2 - (x + 4)(5x - 7) - 9x$;

б) $(3u + 7)^2 + (2u + 9)(5 - 4u) - (u - 6)^2 - 28u$;

в) $(a + 2b)^2 - (5a + 13b)(a + b) + (3b + 2a)^2$;

г) $(2x + 5y)(y + 5x) - (x + 2y)^2 - (y - 3x)^2$.

www.e-ranok.com.ua

177. Розв'яжи рівняння:

а) $(x + 5)^2 - (-x - 3)^2 = 24$;

б) $(2x + 1)^2 - (3 - 2x)^2 = 40$;

в) $(x + 6)^2 + (-2x + 5)^2 - 5x^2 - 77 = 0$;

г) $(2 - 3x)^2 - (x + 7)^2 - 8x^2 + 19 = 0$;

ґ) $(3x + 1)^2 + (1 + 4x)^2 - (5x - 1)^2 = 97$.

178. Спрости вираз:

а) $(2x + 5)^2 - (x - 3)(3 + x) - (1 + 3x)(x - 5) - 34x$;

б) $(-3b + 2a)^2 - (5a - b)(a + 4b) + (a + 2b)^2 - 17b^2$;

в) $(4u + v)(2u - 3v) - (v - 3u)^2 + (u + 5v)^2 - 21v^2$;

г) $(y + 7x)(7x - y) - (5x + y)^2 - (8x - y)(2y + 3x) + 23xy$;

ґ) $(4a - b)(9a + b) - (-5b + 3a)^2 - (5a + b)^2 + 27b^2$.

179. Одну сторону квадрата зменшили на 1 см, а другу збільшили на 6 см. Отримали прямокутник, площа якого на 24 см^2 більша за площу квадрата. Знайди сторону квадрата.

180. Різниця двох чисел дорівнює 4, а різниця їх квадратів дорівнює 80. Знайди ці числа.

181. Розв'яжи рівняння:

а) $x^2 + 10x + 25 = 0$;

б) $49x^2 - 42x + 9 = 0$.

182. Доведи, що різниця суми квадратів двох послідовних цілих чисел та їх подвоєного добутку не залежить від обраних чисел.

www.e-ranok.com.ua

Завдання для тематичного самоконтролю

1. Перетвори вираз на многочлен:
а) $(x + 3)(x - 5)$;
б) $(2y + 4)(3y - 3)$;
в) $(3a - 2b)(2a + b)$;
г) $(b - 3)(b^2 + 2b + 7)$;
ґ) $(3y + 2)^2$;
д) $(2x - b)^2$;
е) $(z - 6)(z + 6)$;
є) $(2b - 3c)(2b + 3c)$.

2. Спрости вираз:
а) $(-x - 6)^2 - (36 - 4x)$;
б) $(y^2 - y)^2 - y^2(-2 + y)(y + 2) + 3y(2y^2 + 4)$.

3. Розв'яжи рівняння $18 - (-2 + x)^2 = x(4 - x)$.

4. Обчисли в зручний спосіб: $95 \cdot 85$.

5. Знайди чотири послідовних натуральних числа, якщо добуток третього та четвертого чисел більший за добуток першого та другого на 34.

Пройди онлайн-тестування

www.e-ranok.com.ua

Завдання підвищеної складності

1. Доведи, що дріб $\frac{10^n + 2}{3}$ дорівнює цілому числу за будь-якого натурального значення n.

2. Скороти дріб $\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$.

3. Порівняй 10^{20} та 50^{10}.

4. Заміни букви цифрами так, щоб рівність $AA^n = ANNA$ була правильною.

5. Якою цифрою закінчується число 3^{20}?

6. Знайди $\frac{y}{x}$, якщо $\frac{x}{2z} = 5$ та $\frac{y}{3z} = 4$.

7. Що більше: 100^{20} чи 9850^{10}?

8. Знайди трицифрове число, сума цифр якого дорівнює 17, якщо при діленні цього числа на 419 в остачі залишається 75.

9. Знайди значення n, якщо $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n} = 1$.

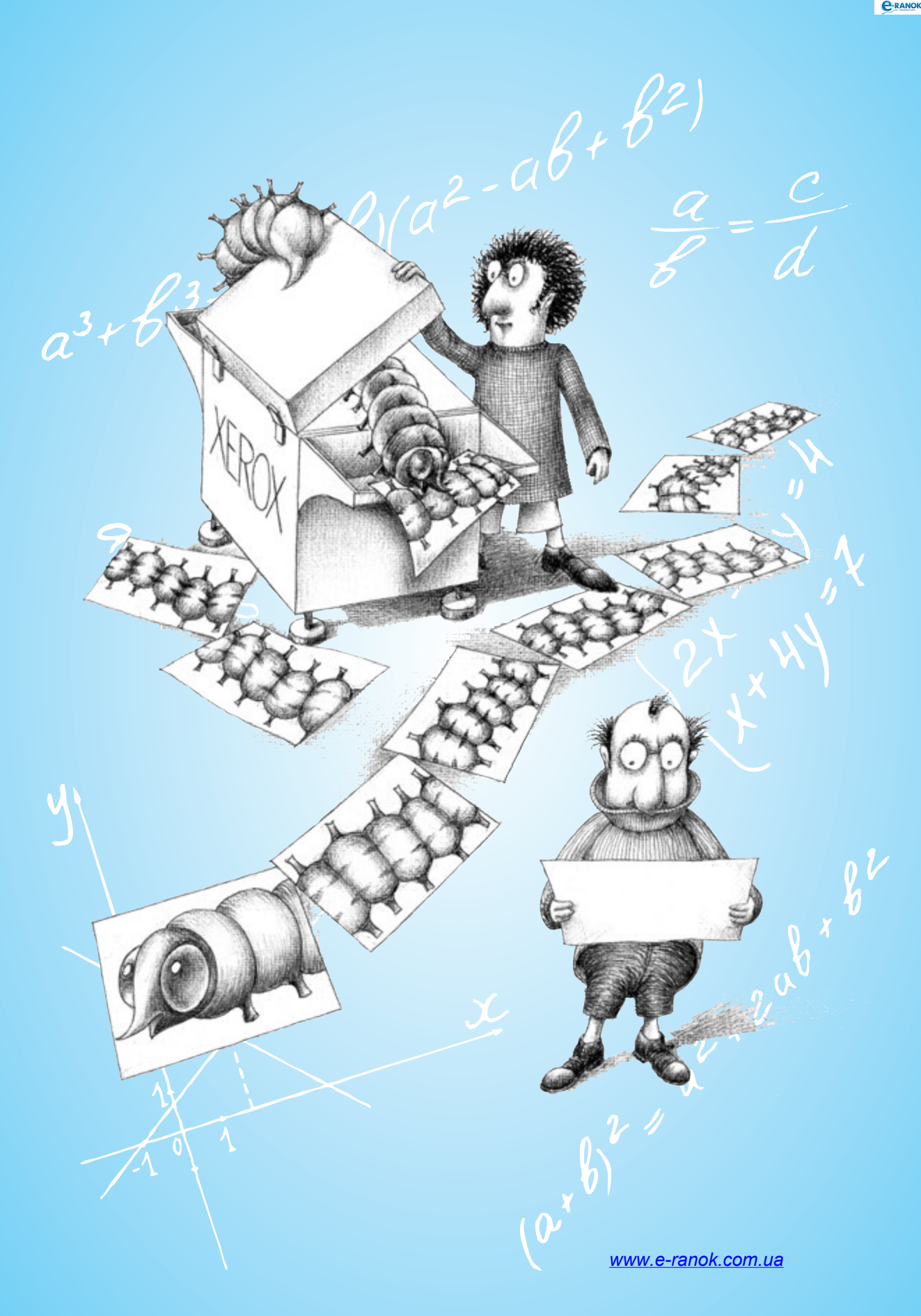
10. Знайди знак значення виразу $a^2b + ad^3 - b^2 : c + b^3c^0$, якщо $a > 0$, $b < 0$, $d < 0$ та $c > 0$. Відповідь обґрунтуй.

11. Якою цифрою закінчується значення суми $2^{16} + 3^{40} + 5^{39} + 2 \cdot 4^7$?

12. Доведи, що вираз $n^3 - n$ ділиться на 3 за будь-якого натурального n.

13. Знайди добуток $(1 + 1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{1996}\right)$.

www.e-ranok.com.ua



www.e-ranok.com.ua

ГЛАВА 2. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

2.1. Винесення спільного множника за дужки

Одним зі способів розкладання многочлена на множники є застосування формул скороченого множення (різниці квадратів і квадрата двочлена), які було розглянуто в попередній главі.

У цій главі ми розглянемо інші способи розкладання многочлена на множники.

Згідно з розподільним законом множення, $a(b + c) = ab + ac$.

Якщо ми змінимо місцями праву й ліву частини в записі цієї рівності, то побачимо, що записали суму одночленів у вигляді добутку. Таке перетворення називають **розкладанням многочлена на множники**.

Найпростішим прийомом розкладання на множники є **винесення спільного множника за дужки**. Спільний множник, що виноситься за дужки, містить усі можливі спільні множники цих доданків, тобто є одночленом або многочленом, на який діляться всі доданки виразу. У виразі $ab + ac = a(b + c)$ за дужки винесено спільний множник a.

Приклад 1. Винесемо спільний множник за дужки:

а) $32a^2 + 24ab = 8 \cdot 4 \cdot a \cdot a + 8 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 8a(4a + 3b)$;

б) $15x^3 + 25x^2 = 5x^2(3x + 5)$;

в) $3y^5 + 6xy^3 + 9xy^2 = 3y^2(y^3 + 2xy + 3x)$.

За допомогою винесення спільного множника за дужки іноді вдається спростити обчислення.

Приклад 2. Обчислимо:

а) $6{,}31 \cdot 8 + 8{,}69 \cdot 8 = 8(6{,}31 + 8{,}69) = 8 \cdot 15 = 120$;

б) $\dfrac{83{,}7 \cdot 36 + 41{,}3 \cdot 36}{25 \cdot 4{,}69 + 25 \cdot 13{,}31} = \dfrac{36(83{,}7 + 41{,}3)}{25(4{,}69 + 13{,}31)} = \dfrac{36 \cdot 125}{25 \cdot 18} = \dfrac{2 \cdot 5}{1 \cdot 1} = 2 \cdot 5 = 10$.

Запитання для самоконтролю

1. Яке перетворення називають розкладанням многочлена на множники?
2. Який вираз береться за спільний множник?
3*. Як можна перевірити правильність розкладання многочлена на множники?

Дивись відеоматеріали

www.e-ranok.com.ua

183. Винеси спільний множник за дужки:

а) $8x + 36$;
б) $12a + 30$;
в) $36a^4b - 54ab$;
г) $28a - 42$;
ґ) $2x^2 - 6x$;
д) $32ax^2y + 44axy$;
е) $x^3 + x^2$;
є) $12a + 16ab$;
ж) $24b^2u^2v - 42buv^3$;
з) $ay^4 + by^2$;
і) $35ax - 28a^2y$;
к) $3pr^2s + 54qrs$;
л) $x^2y - xy^2$;
м) $16x^3y - 20xy^3$;
н) $34x^4y^2 - 51x^3y^3$.

184. Обчисли найраціональнішим способом:

а) $5 \cdot 2{,}35 + 5 \cdot 1{,}65$;
б) $12 \cdot 113{,}3 - 12 \cdot 98{,}3$;
в) $4 \cdot 11{,}8 + 4 \cdot 18{,}2$;
г) $13{,}12 \cdot 6 + 11{,}88 \cdot 6$;
ґ) $23{,}19 \cdot 7 - 13{,}19 \cdot 7$;
д) $11 \cdot 96{,}7 - 11 \cdot 88{,}7$;
е) $3 \cdot 36{,}07 - 3 \cdot 11{,}07$;
є) $9 \cdot 1{,}33 + 9 \cdot 2{,}67$.

185. Розклади на множники:

а) $27a^2 - 18a + 54$;
б) $8u^2 - 12u + 28$;
в) $33x^2y + 44xy^2 - 55xy$;
г) $12a^2 + 18a + 30$;
ґ) $16 - 24a + 40b$;
д) $2x^2y^2 - 4xy^2 + 6y^2$;
е) $21u^2v + 12uv - 15uv^2$;
є) $5a^2b + 6ab^2 - 7ab$;
ж) $18a^3x^2 - 27a^2x^2 + 36a^3x$;
з) $18a^3b + 24a^2b - 12ab$;
і) $-15a^3b^2c - 10a^2b^2c^2 - 5ab^2c^3$;
к) $-16x^2y^3z - 44x^2y^2z^2 + 4x^2yz^2$.

186. Розклади на множники:

а) $2(x + 1) + x(x + 1)$;
б) $16x^2(x - 4) + 7(x - 4)$;
в) $4a(y - 2) - 3(y - 2)$;
г) $9u(2v + 3) - 12(3 + 2v)$;
ґ) $2xy(1 + 4x) - 4(4x + 1)$.

www.e-ranok.com.ua

187. Розклади на множники:

а) $3x(2x + 1) - 2(4x + 2)$;
б) $2a(z - 1) - 5b(1 - z)$;
в) $7(6 + 2x^2) - x(7x^2 + 21)$;
г) $8a(2a + 1) + 2(4 + 8a)$;
ґ) $4x(6a - 2b) - 4(b - 3a)$;
д) $2m(a - b) + 3n(b - a)$;
е) $5x(b - c) - (c - b)$;
є) $(a - 4)^2 - 5(a - 4)$;
ж) $(x - 5)(2y - 3) + (x - 5)(4y + 1)$;
з) $(x + 2)(3y - 1) + (x + 2)(2y - 7)$.

188. Обчисли, попередньо розклавши на множники чисельник і знаменник та скоротивши дріб:

а) $\dfrac{12 \cdot 1{,}37 + 12 \cdot 5{,}63}{29{,}6 \cdot 7 - 25{,}6 \cdot 7}$;
б) $\dfrac{28 \cdot 3{,}14 + 28 \cdot 11{,}86}{2{,}19 \cdot 15 + 4{,}81 \cdot 15}$;
в) $\dfrac{51{,}7 \cdot 48 - 34{,}7 \cdot 48}{17 \cdot 4{,}47 + 17 \cdot 11{,}53}$;
г) $\dfrac{2{,}5^2 + 2{,}5 \cdot 9{,}5}{3 \cdot 3{,}23 + 3 \cdot 6{,}77}$;
ґ) $\dfrac{3{,}2^2 - 3{,}2 \cdot 8{,}2}{11{,}79 \cdot 4 + 8{,}21 \cdot 4}$;
д) $\dfrac{2{,}9 \cdot 11{,}1 + 2{,}9^2}{1{,}4^2 + 1{,}4 \cdot 27{,}6}$.

189. Розв'яжи рівняння:

а) $x^2 + 4x = 0$;
б) $13x^2 - x = 0$;
в) $y^2 + y = 0$;
г) $6x^2 + 8x = 0$.

190. Доведи тотожність:

а) $(3a - 5b)(a^2 + 2ab - 4b^2) - (3a - 5b)(a^2 + 2ab - 7b^2) = 3b^2(3a - 5b)$;
б) $(2a - 1)(6b^2 + 3b - 8) + (1 - 2a)(6b^2 + 3b - 10) = 4a - 2$.

191. Доведи, що значення виразу $8^6 + 2^{15}$ кратне 9.

192. Доведи, що значення виразу $6^4 - 3^6$ кратне 7.

193. Доведи, що вираз $n^2 + 3n$ парний, якщо n — натуральне число.

www.e-ranok.com.ua

2.2. Розкладання многочлена на множники способом групування

Для розкладання многочлена на множники часто буває доцільним розбити його члени на групи. Після винесення за дужки в кожній групі спільного множника в дужках залишається один і той самий вираз. Цей вираз є спільним множником для цих груп. Такий спосіб розкладання на множники називають **способом групування**.

Приклад 1. Розкладемо на множники многочлен $ax + 2bx + 3ay + 6by$. Перший та другий члени мають спільний множник x, а третій та четвертий — спільний множник $3y$. Виносячи їх за дужки, отримаємо:
$ax + 2bx + 3ay + 6by = x(a + 2b) + 3y(a + 2b) =$
$= (a + 2b)(x + 3y).$
Але згрупувати доданки можна й інакше.
Перший і третій члени мають спільний множник a, а другий і четвертий — $2b$.
Тому:
$ax + 2bx + 3ay + 6by = a(x + 3y) + 2b(x + 3y) =$
$= (a + 2b)(x + 3y).$

Способом групування іноді можна розкласти на множники й тричлен. При цьому один із його членів можна записати у вигляді суми подібних доданків, а потім згрупувати отримані члени по два.

Приклад 2. $x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 4x + 12 = x(x + 3) + 4(x + 3) =$
$= (x + 4)(x + 3).$

Приклад 3. $2a^2 + 3a - 2 = 2a^2 + 4a - a - 2 = a(2a - 1) + 2(2a - 1) =$
$= (a + 2)(2a - 1)$
або
$2a^2 + 3a - 2 = 2a^2 + 4a - a - 2 = 2a(a + 2) - (a + 2) =$
$= (2a - 1)(a + 2).$

Приклад 4. Знайдемо значення виразу:
$3{,}4 \cdot 2{,}5 + 7 \cdot 0{,}6 - 4{,}5 \cdot 3{,}4 + 7 \cdot 5{,}4 = 3{,}4(2{,}5 - 4{,}5) +$
$+ 7 \cdot (0{,}6 + 5{,}4) = 3{,}4 \cdot (-2) + 7 \cdot 6 = -6{,}8 + 42 = 35{,}2.$

www.e-ranok.com.ua

Запитання для самоконтролю

1. Поясни, як розкласти многочлен на множники способом групування.
2. Як розкласти тричлен на множники способом групування?

3*. Як розкласти на множники многочлен, що складається з п'яти доданків?

Дивись відеоматеріали

194. Розклади на множники:

а) $ab + 4a + 3b + 12$;
б) $2xy - 14x + y - 2$;
в) $7x + xy - 2y - 14$;
г) $6ab + 15a - 2b - 5$;
ґ) $3u - uv + 15 - 5v$;
д) $8u - 3 + 32uv - 12v$;
е) $4b - 8a - ab + 32$;
є) $18 - 28xy - 21x + 24y$;
ж) $3x - xy + 27 - 9y$;
з) $24 - 5ay + 40a - 3y$.

195. Розклади на множники:

а) $2ax + 3bx + 2ay + 3by$;
б) $35x + ty - 35y - tx$;
в) $3au + av - 6bu - 2bv$;
г) $2au + 2av - 3bu - 3bv$;
ґ) $3ux - 12u + 5vx - 20v$;
д) $8as - 15bt - 20at + 6bs$;
е) $6ab + 16b - 9ac - 24c$;
є) $12ac + 42bc - 2ad - 7bd$;
ж) $5y - 6xz - 2xy + 15z$;
з) $10cd + 6c - 5d - 3$.

196. Запиши у вигляді добутку:

а) $x^3 + x^2 + x + 1$;
б) $3a^4 + a^3 + 6a + 2$;
в) $a^3 - a^2 + a - 1$;
г) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 9$;
ґ) $6b^3 - 2b^2 + 3b - 1$;
д) $35t^3 + 10t^2 + 7t + 2$;
е) $3c^3 - 4c^2 + 6c - 8$;
є) $21u^2 - 9u^3 + 28 - 12u$;
ж) $5u^3 + 2u^2 + 15u + 6$;
з) $6v^3 - 16v^2 + 9v - 24$.

197. Розклади на множники:

а) $a^2 - ab + 2a - 2b$;
б) $x^2 - 2xy + 3x - 6y$;
в) $8xy + 3y^2 + 40x + 15y$;
г) $17a^2 - 3ab + 102a - 18b$;

www.e-ranok.com.ua

г) $25s^2 - 6st + 63s - 14t$;
д) $2x^2 + xy - 6xz - 3yz$;
е) $a^2 - 2ab + 3ac - 6bc$;
є) $3s^2 + 2st - 12su - 8tu$;
ж) $2x^3 + x^2y - 2xy - y^2$;
з) $6a^3 - 9a^2b - 2ab + 3b^2$.

198. Розклади на множники:
а) $6m - mn - 6 + n$;
б) $a^6 + a^4 - 3a^2 - 3$;
в) $5a + 5b - am - bm$;
г) $2x^3 - 3x^2y - 4x + 6y$;
ґ) $x^2y - x + xy^2 - y$;
д) $am^2 - an - bm^2 + cn - cm^2 + bn$.

199. Розклади на множники:
а) $x^2 + 3x + 2$;
б) $x^2 - 10x + 16$;
в) $x^2 + 4x - 5$;
г) $x^2 + x - 20$;
ґ) $x^2 + 5x - 6$;
д) $x^2 - 2x - 15$;
е) $x^2 + 7x + 12$;
є) $x^2 + 2x - 3$;
ж) $x^2 - 6x + 8$;
з) $x^2 - 8x + 15$.

200. Запиши у вигляді добутку:
а) $8xy + 3y^2 + 40x + 15y$;
б) $17a^2 - 3ab + 102a - 18b$;
в) $27s^2 - 6st + 63s - 14t$;
г) $6a^3 - 9a^2b - 2ab + 3b^2$.

201. Розклади на множники:
а) $a^2 - 11a + 28$;
б) $z^2 + z - 42$;
в) $x^2 - x - 56$;
г) $a^2 + 16a + 39$;
ґ) $y^2 - 25y + 84$;
д) $a^2 + 14a - 72$;
е) $b^2 - 28b + 96$;
є) $x^2 - 24x - 81$.

202. Знайди значення виразу $12a^2 - 12ax - 7a + 7x$, якщо $a = 1\frac{1}{6}$; $x = \frac{2}{3}$.

203. Знайди значення виразу $32{,}4 \cdot 6{,}7 + 17{,}6 \cdot 8{,}3 - 32{,}4 \cdot 1{,}7 - 3{,}3 \cdot 17{,}6$.

204. Обчисли $4\frac{2}{7} \cdot 6\frac{2}{3} - 4{,}6 \cdot \frac{3}{5} + 4\frac{5}{7} \cdot 6\frac{2}{3} - \frac{3}{5} \cdot 5{,}4$.

www.e-ranok.com.ua

Завдання для тематичного самоконтролю

1. Розклади на множники:

а) $ay^4 + by^2$;

б) $2x^2y^2 - 8xy^2 + 6y^2$;

в) $2y(1 + 3x) - 3(3x + 1)$;

г) $-16a^2b^3c - 40a^2b^2c^2 + 8a^2bc^2$.

2. Розв'яжи рівняння:

а) $15x^2 - 5x = 0$;

б) $a(a - 2) - 6(2 - a) = 0$.

3. Розклади на множники:

а) $b^3 - b^2 + b - 1$;

б) $2(x + 3)^2 - x(x + 3)$;

в) $8xy + 3y^2 + 40x + 15y$.

4. Запиши у вигляді добутку тричлен $x^2 - 5x - 6$.

5. Доведи, що значення виразу $8^9 + 2^{17}$ кратне 3.

6. Доведи, що різниця квадрата двоцифрового числа та квадрата суми його цифр завжди ділиться на 9.

Пройди онлайн-тестування

www.e-ranok.com.ua

2.3. Сума та різниця кубів двох виразів

Розглянемо добуток многочленів $a + b$ і $a^2 - ab + b^2$:

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \underline{a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{ba^2} - \underline{b^2a} + b^3 = a^3 + b^3.$

Ми отримали **формулу суми кубів** двох виразів.

Тричлен $a^2 - ab + b^2$ називають **неповним квадратом** різниці, оскільки він містить тільки добуток виразів a і b, а не подвоєний добуток, як у формулі квадрата різниці.

Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Тепер помножимо різницю одночленів $a - b$ на вираз $a^2 + ab + b^2$. Отримаємо:

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{ab^2} - \underline{ba^2} - \underline{b^2a} - b^3 = a^3 - b^3.$

Отриману формулу називають **формулою різниці кубів** двох виразів.

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Приклад 1. Спростимо вираз $(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$.

Розв'язання.

Скористаємося формулою суми кубів:

$(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2) = (2a + b)((2a)^2 - 2a \cdot b + b^2) =$
$= (2a)^3 + b^3 = 8a^3 + b^3.$

Приклад 2. $(5x - 2)(25x^2 + 10x + 4) = (5x - 2)((5x)^2 + 2 \cdot 5x + 2^2) =$
$= (5x)^3 - 2^3 = 125x^3 - 8.$

Користуючись формулами суми та різниці кубів, можна розкладати многочлен на множники.

Приклад 3. $27a^3 - 8b^3 = (3a)^3 - (2b)^3 = (3a - 2b)((3a)^2 + 3a \cdot 2b + (2b)^2) =$
$= (3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2).$

www.e-ranok.com.ua

Приклад 4. Розкладемо на множники вираз $(a + 3)^3 - 27$.

Розв'язання.

Скористаємося формулою різниці кубів:

$(a + 3)^3 - 27 = (a + 3)^3 - 3^3 = ((a + 3) - 3)((a + 3)^2 + 3(a + 3) + 3^2) =$

$= (a + 3 - 3)(a^2 + \underline{6a} + \underline{9} + \underline{3a} + \underline{9} + \underline{9}) = a(a^2 + 9a + 27).$

Формули суми та різниці кубів також є **формулами скороченого множення**.

Запитання для самоконтролю

1. Як називають вирази $a^2 + ab + b^2$ та $a^2 - ab + b^2$ і чому?
2. Виведи формулу суми кубів.
3. Виведи формулу різниці кубів.

4*. Виведи формулу різниці кубів, користуючись формулою суми кубів.

Дивись відеоматеріали

205. Знайди добуток:

а) $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$;

б) $(4a - 5b)(16a^2 + 20ab + 25b^2)$;

в) $(a - 4b)(a^2 + 4ab + 16b^2)$;

г) $(16x^2 - 12xy + 9y^2)(4x + 3y)$;

ґ) $(2v - 3u)(9u^2 + 6uv + 4v^2)$;

д) $(6s - t)(36s^2 + 6st + t^2)$;

е) $(4p^2 - 10pq + 25q^2)(5q + 2p)$;

є) $(25u^2 - 15uv + 9v^2)(5u + 3v)$;

ж) $\left(\frac{s^2}{9} + \frac{st}{12} + \frac{t^2}{16}\right)\left(\frac{s}{3} - \frac{t}{4}\right)$;

з) $\left(\frac{c}{2} - \frac{d}{3}\right)\left(\frac{c^2}{4} + \frac{cd}{6} + \frac{d^2}{9}\right)$.

206. Розклади на множники:

а) $8x^3 + y^3$;

б) $8c^3 - 125$;

в) $8a^3 - 125b^3$;

г) $216 + a^3b^3$;

ґ) $27s^3 + 8t^3$;

д) $27x^3 - y^3z^3$;

е) $125u^3 - 27v^3$;

є) $8u^3v^3 + w^3$;

ж) $27p^3 + 64q^3$;

з) $x^3y^3 - 64a^3$.

www.e-ranok.com.ua

207. Винеси спільний множник за дужки, а потім розклади на множники за формулою суми або різниці кубів:

а) $108x^4 - 4xy^3$;
б) $192x^4y - 3xy^4$;
в) $2x^4y + 16xy^4$;
г) $16u^5 + 54u^2v^3$;
ґ) $u^4v - 64uv^4$;
д) $4a^3v^5 + 108v^2$;
е) $40s^2t - 5s^5t^4$;
є) $2a^5 + 16a^2b^3$;
ж) $a^8b^4 - 8a^2b^7$;
з) $9p^5q - 9p^2q^4$.

208. Перетвори добуток на многочлен:

а) $(a^2 - 2)(a^4 + 4 + 2a^2)$;
б) $(9 - 6x^2 + 4x^4)(2x^2 + 3)$;
в) $(y^2 + 3)(9 - 3y^2 + y^4)$;
г) $(t^2 - 2s^2)(2s^2t^2 + 4s^4 + t^4)$;
ґ) $(4 - uv)(16 + 4uv + u^2v^2)$;
д) $(16a^4 - 4a^2b^2 + b^4)(4a^2 + b^2)$;
е) $(25p^4 + 10p^2q + 4q^2)(2q - 5p^2)$;
є) $\left(x^2y^2 - \frac{1}{6}\right)\left(x^4y^4 + \frac{1}{6}x^2y^2 + \frac{1}{36}\right)$;
ж) $\left(\frac{a^2b^2}{2} + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{a^4b^4}{4} + \frac{9}{25} - \frac{3a^2b^2}{10}\right)$;
з) $\left(\frac{9c^2}{16} - \frac{cd^2}{4} + \frac{d^4}{9}\right)\left(\frac{3c}{4} + \frac{d^2}{3}\right)$.

209. Розклади на множники:

а) $\frac{a^3}{27} - \frac{1}{8}$;
б) $b^6 - \frac{8}{27}$;
в) $\frac{x^3}{y^3} + \frac{8}{125}$;
г) $\frac{u^3}{64} + \frac{v^6}{125}$;
ґ) $\frac{64}{p^3} - \frac{1}{q^3}$;
д) $\frac{27}{x^3} - \frac{y^3}{64}$;
е) $\frac{1}{a^3b^3} + \frac{c^3}{8}$;
є) $\frac{8p^6}{125} + \frac{27}{q^3}$;
ж) $-a^6 + \frac{1}{8}$;
з) $-\frac{1}{27} - b^6$;
і) $0{,}008x^3 - y^3$;
к) $0{,}027a^3 - b^3$;
л) $a^3 + 0{,}064b^3$;
м) $c^3d^3 + 0{,}125g^3$;
н) $0{,}001u^3 - 0{,}027v^3$;
о) $27x^6 - 0{,}027y^3$;
п) $p^3q^3 + 0{,}125$;
р) $-x^3 + y^3$.

210. Спрости вираз:

а) $(3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2) + (a^2 + 4b^2 - 2ab)(2b + a)$;
б) $(4x + 5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2) - 16x(5y + 2x)(2x - 5y)$;
в) $v^2(8v - 3u) + (6uv + 4v^2 + 9u^2)(3u - 2v)$;

www.e-ranok.com.ua

г) $(16s^2 - 4st + t^2)(t + 4s) - 4s^2(16s + 9t)$;

г) $(3c + 2d)(9c^2 - 6cd + 4d^2) - (2c - d)(d^2 + 4c^2 + 2cd) - 10c^3$.

211. Спрости вираз:

а) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - (x - 1)(x + 1)(x - 2)$;

б) $a(a - 3)(a + 3) - (a + 2)(a^2 - 2a + 4)$;

в) $(3a^2 + 1)(9a^4 - 3a^2 + 1) - 3a^2(2a^2 + 1)^2 + (5a^2 - 1)(2 - 3a^2)$;

г) $(a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^{48} + 1)(a^{12} + 1)(a^{24} + 1)(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1)$.

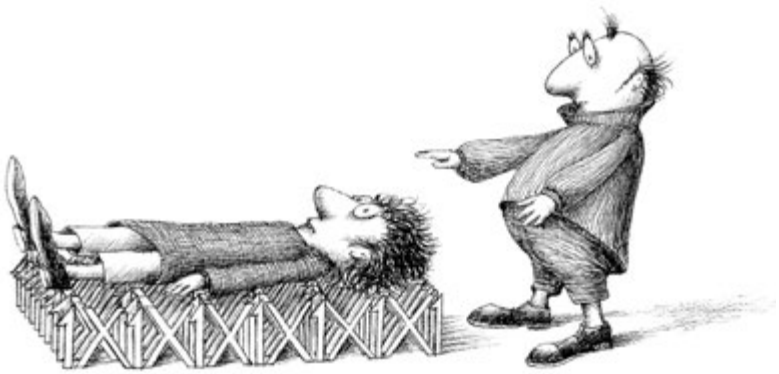
212. Розклади на множники:

а) $(a + 4)^3 - 27$;

б) $(a - 9)^3 + 64$;

в) $(a - 7)^3 + 8$;

г) $(a - 12)^3 + 27$.



213. Розв'яжи рівняння:

а) $(4 - 5x)(16 + 20x + 25x^2) + 5x(5x - 2)(5x + 2) = 4$;

б) $16\left(\frac{1}{2}x - 2\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + x + 4\right) - 2x(x - 6)^2 = 24x^2$;

в) $(2 - 3x)(4 + 6x + 9x^2) + 3x(3x + 1)(3x - 1) = x$;

г) $27\left(\frac{1}{3}x - 1\right)\left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + 1\right) - x(x - 1)^2 = 2x^2$.

214. Доведи, що значення виразу $327^3 + 173^3$ ділиться націло на 500.

215. Доведи, що значення виразу $731^3 - 631^3$ ділиться націло на 100.

216. Чи ділиться значення виразу $38^3 + 37^3$ націло на 75?

www.e-ranok.com.ua

2.4. Куб двочлена

Щоб знайти куб двочлена, потрібно двочлен помножити на його квадрат:

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Ми отримали **формулу куба суми**.

Куб суми двох виразів дорівнює кубу першого виразу плюс потроєний добуток квадрата першого виразу на другий плюс потроєний добуток квадрата другого виразу на перший і плюс куб другого виразу:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Аналогічно можна отримати **формулу куба різниці**.

Куб різниці двох виразів дорівнює кубу першого виразу мінус потроєний добуток квадрата першого виразу на другий плюс потроєний добуток квадрата другого виразу на перший і мінус куб другого виразу:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Приклад 1. $(x + 3)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 9 + 27 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27.$

Приклад 2. $(3x - 4y)^3 = 27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3.$

Приклад 3. Знайдемо значення виразу 19^3, скориставшись формулою куба різниці.

Розв'язання.

$19^3 = (20 - 1)^3 = 20^3 - 3 \cdot 20^2 \cdot 1 + 3 \cdot 20 \cdot 1 - 1 =$
$= 8000 - 1200 + 60 - 1 = 8000 - 1141 = 6859.$

Таким чином, ми бачимо, що формули куба двочлена дозволяють спрощувати обчислення так само, як і інші формули скороченого множення.

Запитання для самоконтролю

1. Виведи формулу куба суми.
2. Виведи формулу куба різниці.
3*. Виведи формулу куба різниці, використовуючи формулу куба суми.

www.e-ranok.com.ua

217. Знайди куб двочлена:

а) $(a + 2)^3$;
б) $(x - y)^3$;
в) $(x - 4)^3$;
г) $(v + 6)^3$;
ґ) $(3 + b)^3$;
д) $(s + t)^3$;
е) $(2 - u)^3$;
є) $(3 - t)^3$;
ж) $(t + 5)^3$;
з) $(c + 4)^3$.

218. Запиши у вигляді многочлена:

а) $(2x - 3)^3$;
б) $(3a - 2b)^3$;
в) $(3y + 1)^3$;
г) $(4x + 3y)^3$;
ґ) $\left(\frac{2}{3} + \frac{3u}{4}\right)^3$;
д) $\left(\frac{3s}{5} + \frac{t}{3}\right)^3$;
е) $(5u - v)^3$;
є) $(5v - 0{,}4)^3$;
ж) $(2p - 0{,}5q)^3$;
з) $(1 - 4a)^3$.

219. Спрости вираз:

а) $(a + b)^3 - a(a + b)^2 - b(b - a)^2 + (-3ab^2)$;
б) $(x - 2y)^3 + 6xy(x - 2y) + 8y^3$;
в) $(u + v)^3 - (u - v)^3 - v(5u^2 + v^2)$;
г) $(a + 2b)^3 - (a - 2b)(2b + a)^2 - 4ab(a + 4b)$;
ґ) $(s - 3t)^3 - 27t^2(s - t) + s^2(8t - s)$.

220. Спрости вираз $x(x + 1)(x + 2) + x + 1$ та знайди його значення, якщо:

а) $x = -6$;
б) $x = 3$.

www.e-ranok.com.ua

221. Спрости вираз:

а) $(x + 2y)^3 - (2y + x)(x^2 + y^2 - 2xy) - 6y^2(2x + y)$;

б) $(a - b)(b + a)^2 - (a - b)^3 + b^2(4a - b)$;

в) $(3u + v)^3 - 9u(2u + v)(v + u) - u^3$;

г) $(2x - y)^3 + (x - 2y)^3 + 18xy(x - y)$;

ґ) $(a - 4b)^3 - (2b + a)^2(a - 16b) - 27a^2b$.

222. Піднеси до куба число, записавши його у вигляді суми або різниці:

а) 11^3;

б) 31^3;

в) 12^3;

г) 21^3;

ґ) 39^3;

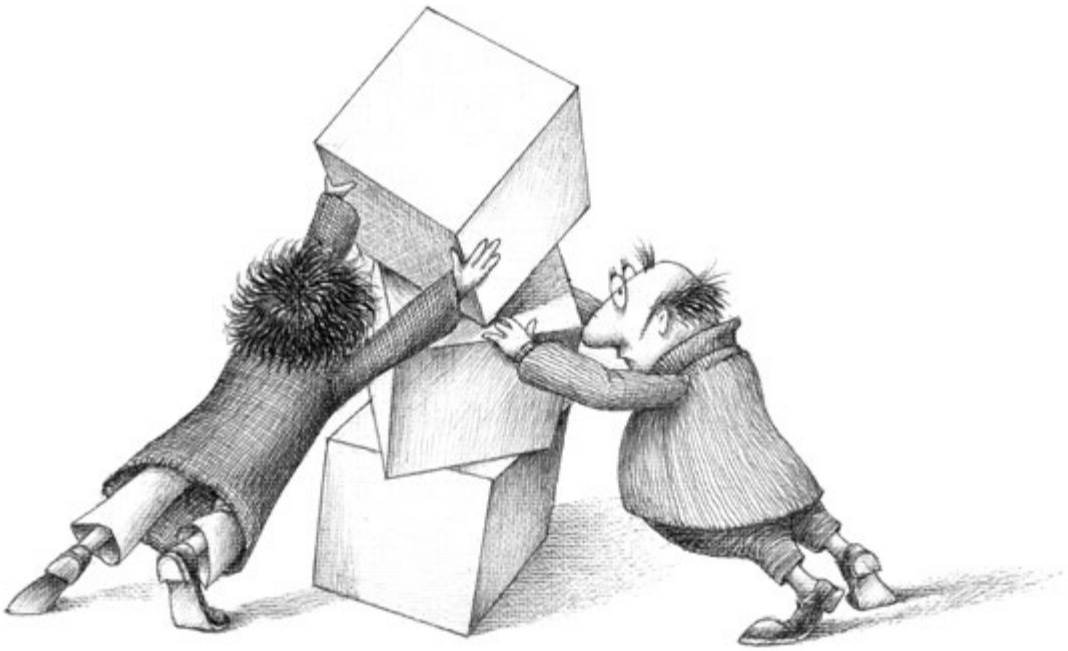
д) 18^3;

е) 29^3;

є) 41^3;

ж) 22^3;

з) 50^3.



www.e-ranok.com.ua

2.5. Розкладання многочленів на множники із застосуванням декількох способів

Для розкладання многочленів на множники ми застосовували винесення за дужки спільного множника, спосіб групування, формули скороченого множення. Іноді розкласти многочлен на множники вдається, лише скориставшись послідовно кількома способами. При цьому, якщо можливо, потрібно починати перетворення з винесення спільного множника за дужки.

Приклад 1. Розкладемо на множники многочлен $16u^5 + 54u^2v^3$.

Почнемо з винесення спільного множника за дужки:
$16u^5 + 54u^2v^3 = 2u^2(8u^3 + 27v^3)$.
Продовжимо розкладання на множники, застосувавши для виразу в дужках формулу суми кубів:
$8u^3 + 27v^3 = (2u)^3 + (3v)^3 = (2u + 3v)(4u^2 - 6uv + 9v^2)$.
Отже,
$16u^5 + 54u^2v^3 = 2u^2(2u + 3v)(4u^2 - 6uv + 9v^2)$.

Приклад 2. Розкладемо на множники многочлен $18x^3 + 12x^2 + 2x$.

Винесемо за дужки спільний множник $2x$:
$18x^3 + 12x^2 + 2x = 2x(9x^2 + 6x + 1)$.
Тричлен у дужках можна записати у вигляді квадрата двочлена:
$9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$.
Тоді
$18x^3 + 12x^2 + 2x = 2x(3x + 1)^2$.

Приклад 3. Розкладемо на множники многочлен $x^2 - 2x - 3$.

$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 3 - 1 = (x - 1)^2 - 4$.
Отриманий вираз можна розкласти на множники за формулою різниці квадратів:
$(x - 1)^2 - 4 = (x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = (x - 3)(x + 1)$.
Отже,
$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$.

Приклад 4. Розкладемо на множники многочлен $a^2 - 4ax - 9 + 4x^2$.

$a^2 - 4ax - 9 + 4x^2 = a^2 - 4ax + 4x^2 - 9 = (a - 2x)^2 - 9 =$
$= (a - 2x - 3)(a - 2x + 3)$.

Приклад 5. Розкладемо на множники многочлен $c^2 + d - d^2 + c$.

$c^2 + d - d^2 + c = c^2 - d^2 + d + c = (c - d)(c + d) + (d + c) =$
$= (d + c)(c - d + 1)$.

www.e-ranok.com.ua

Перетворення виразів використовуються не тільки для спрощення обчислень, але й для розв'язування рівнянь та інших задач. Розглянемо приклади.

Приклад 6. Доведемо, що многочлен $a^2 + 16a + 64$ за будь-яких значень змінної набуває тільки невід'ємних значень.
Доведення.
Для цього розкладемо цей многочлен на множники:
$a^2 + 16a + 64 = a^2 + 2 \cdot 8 \cdot a + 8^2 = (a + 8)^2$.
Квадрат будь-якого числа є числом невід'ємним, що й потрібно було довести.

Приклад 7. Доведемо, що за будь-якого натурального n значення виразу $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ ділиться націло на 4.
Доведення.
Розкладемо поданий вираз на множники, скориставшись формулою різниці квадратів:
$(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = (n + 1 + n - 1)(n + 1 - n + 1) =$
$= 2n \cdot 2 = 4n$.
Оскільки вираз $4n$ містить множник 4, то він ділиться націло на 4.

Запитання для самоконтролю

1. Які ти знаєш способи розкладання многочлена на множники?
2*. Чи завжди можна розкласти многочлен на множники? Наведи приклади.

Дивись відеоматеріали

223. Розклади на множники:

а) $5x^2 - 5y^2$;
б) $am^2 - an^2$;
в) $9p^2 - 9$;
г) $75 - 27c^2$;
ґ) $50my^2 - 2mx^2$;
д) $a^3 - a$;
е) $y^3 - y^5$;
є) $81x^2 - x^4$;
ж) $4y^3 - 100y^5$;
з) $7b^2 - 63$.

www.e-ranok.com.ua

224. Розклади на множники:

а) $108x^4 - 4xy^3$;
б) $192x^4y - 3xy^4$;
в) $2x^4y + 16xy^4$;
г) $u^4v - 64uv^4$;
ґ) $4a^3v^5 + 108v^2$;
д) $40s^2t - 5s^5t^4$;
е) $a^8b^4 - 8a^2b^7$;
є) $9p^5q - 9p^2q^4$.

225. Запиши у вигляді добутку:

а) $3x^2 + 6xy + 3y^2$;
б) $-m^2 + 2m - 1$;
в) $-4x - 4 - x^2$;
г) $6p^2 + 24q^2 + 24pq$;
ґ) $45x + 30ax + 5a^2x$;
д) $18cx^2 - 24cx + 8c$.

226. Розклади на множники:

а) $x^2 + 2xy + y^2 - 49$;
б) $a^2 - 9b^2 + 6bc - c^2$;
в) $x^3y^2 - xy - x^3 + x$;
г) $a^3 + 8 - a^2 - 2a$;
ґ) $a^2 - b^2 + 4a + 4$;
д) $b^6 - 4b^5 + 12b^2 - 9$;
е) $a^3 - 27 + a^2 - 3a$;
є) $b^{10} - 25b^8 - 40b^4 - 16$;
ж) $x^2 - y^2 - 6x + 9$;
з) $a^3x^2 - ax - 4a^3 - 2a$.

227. Розклади на множники:

а) $8a^3 - 27b^3 + 4a^2 - 12ab + 9b^2$;
б) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 4a^2 + 4ab - b^2$;
в) $m^3 + 27n^3 + m^2 + 6mn + 9n^2$;
г) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 4cd - 4d^2$;
ґ) $(x - y)(x + y) + 2(x + 2y) - 3$;
д) $(x - y)(x + y) + 2(2x - y) + 3$.

228. Розклади многочлен на множники, виділивши квадрат двочлена:

а) $x^2 - 6x + 8$;
б) $x^2 + 8x + 7$;
в) $x^2 - 4x - 21$;
г) $x^2 + 10x + 9$;
ґ) $x^2 + 4x - 5$;
д) $x^2 + 6x - 7$.

www.e-ranok.com.ua

229. Розв'яжи рівняння:

а) $x^3 - x = 0$;
б) $4x - x^3 = 0$;
в) $x^2 + x^3 = 0$;
г) $-20x^2 + 5x^4 = 0$;
ґ) $4x^3 - 3x^2 = 4x - 3$;
д) $x^3 + x = 0$;
е) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$;
є) $2y^3 - y^2 - 32y + 16 = 0$;
ж) $x^3 - 2x^2 = 0$;
з) $y^3 - y^2 = 16y - 16$.

230. Запиши у вигляді добутку:

а) $ab^2 - a - b^3 + b$;
б) $bx^2 + 2b^2 - b^3 - 2x^2$;
в) $x^3 + x^2y - 4y - 4x$;
г) $x^3 - 3y^2 + 3x^2 - xy^2$.

231. Перетвори на добуток:

а) $a^2 - b^2 + 2(a + b)^2$;
б) $b^2 - c^2 - 10(b - c)^2$;
в) $x^2(x + 2y) - x - 2y$;
г) $a^3 - b^3 + 5a^2b - 5ab^2$;
ґ) $a^3 - 5a^2 - 4a + 20$;
д) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$;
е) $2(x - y)^2 + 3x^2 - 3y^2$;
є) $5a^2 - 5 - 4(a + 1)^2$.

232. Розклади на множники:

а) $p^3 - 2p^2 + 2p - 1$;
б) $8b^3 + 6b^2 + 3b + 1$;
в) $a^3 - 4a^2 + 20a - 125$;
г) $x^3 - y^3 + 7x^2y - 7xy^2$;
ґ) $(8x - 4)^2 - (2x + 1)^2$;
д) $a^4 + ab^3 - a^3b - b^4$;
е) $x^4 + x^3y - xy^3 - y^4$;
є) $x^3 + y^3 + 2x^2 - 2xy + 2y^2$;
ж) $a^3 - b^3 + 3a^2 + 3ab + 3b^2$;
з) $49(y - 4)^2 - 9(y + 2)^2$.

233. Доведи, що значення виразу $(2n + 1)(n + 5) - 2(n + 3) \cdot (n - 3) - (5n + 13)$ за жодного цілого n не ділиться націло на 6.

234. Доведи, що квадрат непарного числа є числом непарним.

235. Доведи, що різниця квадратів двох послідовних непарних чисел ділиться націло на 4.

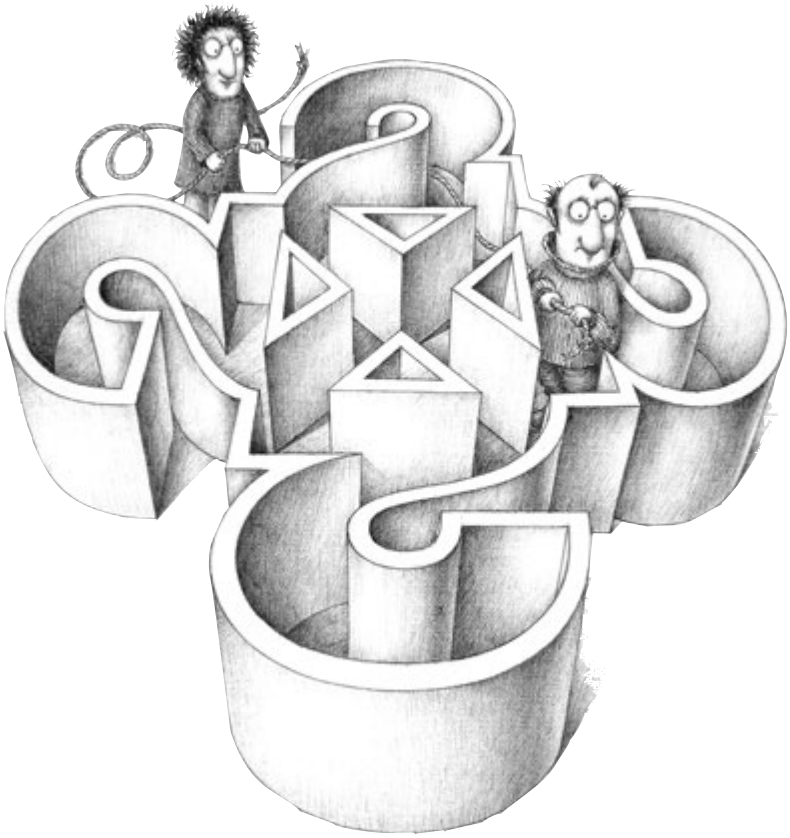
www.e-ranok.com.ua

236. Є три послідовних цілих числа. Подвоєний квадрат більшого числа на 49 більший за суму квадратів інших чисел. Знайди ці числа.

237. Доведи, що за будь-якого натурального n значення виразу $(5n + 1)^2 - (2n - 1)^2$ ділиться націло на 7.

238. Чи може вираз $-b^2 - 25 + 10b$ набувати додатного значення?

239. Є три послідовних цілих числа. Доведи, що сума квадратів крайніх чисел завжди більша за подвоєний квадрат середнього числа на одну й ту саму величину.



www.e-ranok.com.ua

2.6. Формули скороченого множення на службі в арифметики

Як ти вже знаєш, алгебраїчні перетворення виразів, розкладання на множники, використання формул скороченого множення дають змогу розв'язувати багато задач і значно спрощують обчислення.

Розглянемо деякі приклади.

Не викликає сумніву, що вираз a^2 можна записати інакше:

$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a - b)(a + b) + b^2$.

Використовуючи отриману формулу $a^2 = (a - b)(a + b) + b^2$, ми зможемо підносити до квадрата великі числа навіть усно.

Приклад 1. $993^2 = (993 + 7)(993 - 7) + 7^2 = 1000 \cdot 986 + 49 = 986\,000 + 49 = 986\,049$.

Приклад 2. $66^2 = (66 + 4)(66 - 4) + 4^2 = 70 \cdot 62 + 16 = 4340 + 16 = 4356$.

Тепер розглянемо спосіб, який допоможе нам швидко підносити до квадрата число, що закінчується цифрою 5.

Кожне таке число можна записати у вигляді $10a + 5$, де a — число десятків. Тоді квадрат цього числа матиме вигляд:

$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25$.

Тобто потрібно число десятків помножити на число, яке на одиницю більше за нього, і до добутку дописати справа 25.

Справді, помножити число на 100 і додати 25 — усе одно що дописати до нього справа 25.

Приклад 3. Знайдемо добуток чисел 893 і 897. Запишемо добуток як різницю квадратів:

$893 \cdot 897 = (895 - 2)(895 + 2) = 895^2 - 4$.

Для піднесення до квадрата числа 895 скористаємося виведеним правилом:

$895^2 = 89 \cdot 90 \cdot 100 + 25 = 801\,025$.

Отримаємо: $893 \cdot 897 = 801\,025 - 4 = 801\,021$.

Приклад 4. Знайдемо 35^2. Кількість десятків у цьому числі дорівнює 3. Помножимо 3 на 4 і допишемо 25.

Отримаємо: $35^2 = 1225$.

www.e-ranok.com.ua

Запитання для самоконтролю

1. Як зручно піднести до квадрата число, що закінчується цифрою 5? Виведи формулу.
2. Як зручно підносити до квадрата багатозначні числа?

3*. Придумай простий спосіб піднесення до квадрата числа, що складається з цілого та $\frac{1}{2}$.

240. Обчисли зручним способом:

а) 45^2;
б) 55^2;
в) 105^2;
г) 95^2;
ґ) 635^2;
д) 975^2.

241. Обчисли простим способом, не користуючись таблицею квадратів:

а) 27^2;
б) 37^2;
в) 54^2;
г) 48^2;
ґ) 988^2;
д) 89^2;
е) 992^2;
є) 997^2.

242. Обчисли без допомоги калькулятора:

а) $694 \cdot 696$;
б) $483 \cdot 487$;
в) $568 \cdot 572$;
г) $326 \cdot 334$.

243. Обчисли зручним способом:

а) $\left(3\frac{1}{2}\right)^2$;
б) $\left(7\frac{1}{2}\right)^2$;
в) $\left(12\frac{1}{2}\right)^2$;
г) $\left(23\frac{1}{2}\right)^2$.

www.e-ranok.com.ua

Завдання для тематичного самоконтролю

1. Розклади на множники:

а) $36 - 81x^2$;

б) $27 - c^3$;

в) $b^3 + 64$;

г) $125 + 8a^3$.

2. Знайди значення виразу $28^2 + 2 \cdot 28 \cdot 72 + 72^2$.

3. Запиши у вигляді добутку:

а) $108x^4 - 4xb^3$;

б) $-n^2 + 2n - 1$;

в) $(8x - 4)^2 - (2x + 1)^2$;

г) $(2a + 4)^3 - 27a^3$.

4. Розв'яжи рівняння $m^3 - m^2 = 16m - 16$.

5. Доведи, що вираз $x^2 - 8x + 22$ за будь-яких значень x набуває тільки додатних значень.

6. Задано чотири послідовних цілих числа. Доведи, що якщо від суми квадратів двох більших чисел відняти суму квадратів менших чисел, то отримана різниця дорівнюватиме подвоєній сумі чотирьох заданих чисел.

Пройди онлайн-тестування

www.e-ranok.com.ua

Завдання підвищеної складності

1. Розклади на множники многочлен:
$ab(a - b) - ac(a + c) + bc(2a + c - b)$.

2. Спрости вираз $(x^4 - 2x^2 + 4)(x^2 + 2) - 2(x^3 - 1)^2 - (-x^3 - 3)(x^3 - 3)$.

3. Знайди ціле число, з якого вийде повний квадрат, якщо додати до нього 100 або 168.

4. Зі ста одного далматинця у п'ятдесяти восьми чорна плямка на лівому вусі, у п'ятнадцяти — на правому. У двадцяти дев'яти далматинців вуха білі. Скільки далматинців мають чорні плямки на обох вухах?

5. Відомо, що $a^2 = a + 1$. Чому дорівнює a^5?

6. Доведи, що $(x + 1)(x^{14} - x^{13} + x^{12} - x^{11} + x^{10} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = x^{15} + 1$.

7. Доведи тотожність $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

8. Доведи тотожність $(p^2 + cq^2)(r^2 + cs^2) = (pr + csq)^2 + c(ps - qr)^2$.

www.e-ranok.com.ua

www.e-ranok.com.ua

ГЛАВА 3. ФУНКЦІЇ

3.1. Поняття функції. Способи задання функції

Функція — це одне з основних математичних і загальнонаукових понять, що виражає залежність між змінними величинами.

Кожна галузь знань — фізика, хімія, біологія, соціологія, лінгвістика та інші — має свої об'єкти вивчення, установлює властивості і, що найважливіше, взаємозв'язки між об'єками.

У різних науках і галузях людської діяльності виникають кількісні співвідношення. Математика вивчає їх у вигляді властивостей чисел; вона розглядає абстрактні змінні величини, вивчає різні закони та взаємозв'язки, які математичною мовою називають **функціональними залежностями**, або **функціями**.

Наприклад, у співвідношенні $y = x^2$ геометр або геодезист побачить залежність площі квадрата (y) від величини його сторони (x), а фізик, авіаконструктор або суднобудівник може вгледіти в ньому залежність сили (y) опору повітря або води від швидкості (x) руху. Математика ж вивчає залежність $y = x^2$ та її властивості в абстрактному вигляді. Вона встановлює, наприклад, що при залежності $y = x^2$ збільшення x у два рази приводить до чотирикратного збільшення y. І де б конкретно не з'являлася ця залежність, зроблений абстрактний математичний висновок можна застосовувати в конкретній ситуації до будь-яких конкретних об'єктів.

Припустимо, у класі 25 учнів. Кожному натуральному числу від 1 до 25 відповідає прізвище учня. Можна сказати, що ми задали функцію, яка відображає відповідність між порядковим номером у списку класу та прізвищем учня.

Тепер візьмемо оцінки останньої контрольної роботи з математики. У цьому випадку можна розглянути функцію, яка відображає відповідність між порядковим номером у списку класу й оцінкою за контрольну роботу. Позначимо через X множину порядкових номерів, що складається з усіх натуральних чисел від 1 до 25:

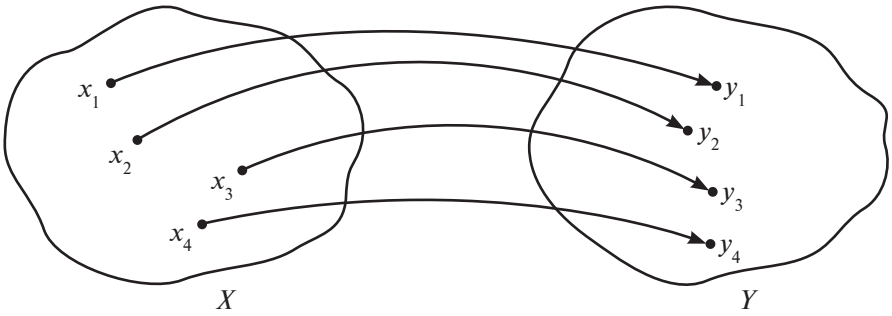
$X = \{1; 2; \ldots ; 25\}$.

Можливо, що не всі учні класу були присутні на контрольній роботі, тоді говорять, що функція визначена не на всій множині X, а тільки на її частині (таку частину називають **підмножиною**). Значеннями функції можуть бути оцінки від 1 до 12, які утворюють **множину значень**, або **область значень функції** $Y = \{1; 2; \ldots ; 12\}$.

www.e-ranok.com.ua

Множину X називають **областю визначення функції**. Змінну x, яка може набувати значень з області визначення X, називають **аргументом функції**, або **незалежною змінною**. Ми будемо розглядати тільки ті функції, аргументами і значеннями яких є числа з якої-небудь числової множини. З наведених вище прикладів до таких належить друга функція. Значеннями першої функції були прізвища учнів.

Тепер сформулюємо означення функції. Нехай задано дві множини X і Y (див. рисунок). Кожному елементу з множини X будемо ставити у відповідність за певним правилом тільки один елемент із множини Y.



Функцією (або функціональною залежністю) називається правило, за яким кожному елементу однієї множини ставиться у відповідність єдиний елемент іншої множини.

Якщо область визначення функції скінченна, то функцію можна задати **за допомогою таблиці**.

Приклад 1.

x	-3	-1	0	2	3	5
y	-2	3	3	4	0	7

У верхньому рядку наведено значення аргумента, а в нижньому — відповідні значення функції. Цю саму функцію можна задати за допомогою впорядкованих пар чисел $(-3; -2)$, $(-1; 3)$, $(0; 3)$, $(2; 4)$, $(3; 0)$, $(5; 7)$.

Областю визначення цієї функції є множина

$X = \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$,

а областю значень — множина

$Y = \{-2; 0; 3; 4; 7\}$.

Якщо в область визначення входить безліч елементів, функцію неможливо задати ні у вигляді таблиці, ні у вигляді впорядкованих пар чисел. Досить

www.e-ranok.com.ua

часто у таких випадках функцію можна задати **формулою**. Наприклад, формула $y = 3 - x$ дозволяє знайти для будь-якого значення x відповідне йому значення функції. При цьому значенню аргумента $x = 0$ відповідає значення функції $y = 3$, значенню $x = 2$ — значення функції $y = 1$ тощо.

У загальному випадку функція, задана формулою, виглядає так: $y = f(x)$, де $f(x)$ позначає конкретну формулу або вираз; x — **аргумент**, або **незалежна змінна**; y — **функція**, або **залежна змінна**.

Приклад 2. Функція задана формулою $f(x) = x^2 - 2$. Обчислимо значення функції при $x = -2$ та $x = 3$, тобто $f(-2)$ і $f(3)$.
Для обчислення $f(-2)$ замінимо у формулі аргумент x на його числове значення -2: $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$.
Тепер візьмемо $x = 3$ та обчислимо: $f(3) = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$.

Приклад 3. Функція задана формулою $f(x) = -3x + 4$. Знайдемо значення аргумента, за якого значення функції дорівнює 6,4. Для цього замінимо $f(x)$ у формулі на її числове значення 6,4 і розв'яжемо отримане рівняння:
$-3x + 4 = 6{,}4$;
$-3x = 6{,}4 - 4$;
$-3x = 2{,}4$;
$x = 2{,}4 : (-3)$;
$x = -0{,}8$.

Якщо функцію подано у вигляді формули й область її визначення не вказано, то областю визначення будуть усі значення аргумента, при яких ця формула має зміст.

Наприклад, областю визначення функцій $y = -3x + 4$; $y = \frac{2}{3}x - 1$; $y = -2x^3 + 4x^2 - x + 1{,}5$ є всі числа, а областю визначення функції $y = \frac{3}{x}$ — усі числа, крім $x = 0$.

Область визначення функції будемо позначати літерою D.
В останньому випадку можемо записати $D(y)$: $x \neq 0$.

Якщо функцію задано формулою, права частина якої є цілим виразом, і її область визначення не вказано, то областю визначення такої функції будуть усі числа.

www.e-ranok.com.ua

Приклад 4. Знайдемо область визначення функції $y=\dfrac{x}{x-2}$.

Розв'язання.
При $x=2$ знаменник цього дробу перетворюється на нуль. Оскільки на нуль ділити не можна, то при $x=2$ формула не має змісту. Таким чином, областю визначення цієї функції є всі числа, крім $x=2$, $D(y)$: $x\neq 2$.

Область значень функції зазвичай позначають літерою E.

Наприклад, функція, задана формулою $y=x^2$, може набувати тільки невід'ємних значень, тому запишемо: $E(y)$: $y\geq 0$.

Розглянемо функцію, значення якої обчислюється за різними формулами для різних значень аргумента. Наприклад, $y=-3x$, якщо $x\geq 1$, та $y=-3$, якщо $x<1$. У цьому випадку функцію будемо записувати у вигляді

$$\begin{cases} y=-3x, \text{ якщо } x\geq 1, \\ y=-3, \text{ якщо } x<1. \end{cases}$$

При $x=3$ значення функції необхідно обчислювати за першою формулою, тобто $y=-9$. При $x=-5$ — за другою, тобто $y=-3$.

Традиційно незалежну змінну позначають x, а залежну — y, тобто $y=y(x)$. Але незалежну змінну може бути позначено як t, m, v тощо, а залежну — f, g, s тощо. Узагалі, надалі ти стикнешся з функціями, де залежна змінна в іншому випадку виступає незалежною. Наприклад, у фізиці функція швидкості: $v(x)$, а функція переміщення: $s(v)$.

У деяких випадках функції можна задавати **описом**. Такий спосіб задання функцій ще називають **словесним** способом.

Наприклад, так: якщо x — парне число, то $y=0$, а якщо x — непарне число, то $y=1$.

У наступному розділі ти познайомишся ще з одним способом задання функції — **графічним**.

Отже, способи задання функцій:
— за допомогою таблиці;
— за допомогою формули;
— словесний (описом);
— графічний.

www.e-ranok.com.ua

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюй означення функції, або функціональної залежності.
2. Якими способами можна задати функцію? Наведи приклади.
3. Що таке аргумент?
4. Що називають областю визначення, а що — областю значень функції?

5*. Наведи приклад відповідності між двома множинами, яка не є функцією.

Дивись відеоматеріали

244. Функцію задано у вигляді таблиці.

x	$-3{,}7$	$-2{,}5$	$-1{,}2$	$0{,}2$	$1{,}6$	$2{,}9$
y	$4{,}1$	$2{,}3$	$-1{,}7$	-3	$-1{,}7$	$2{,}3$

Знайди область визначення та множину значень функції. За яких значень аргумента значення функції дорівнює 2,3?

245. Функцію задано у вигляді впорядкованих пар чисел: $(-5;\ -3{,}2)$; $(-3{,}5;\ 1{,}4)$; $(-1;\ -0{,}5)$; $(0{,}5;\ -1{,}8)$; $(2;\ 1{,}4)$. Задай цю функцію у вигляді таблиці. Знайди область визначення функції та множину її значень.

246. Функцію задано формулою на вказаній множині значень аргумента. Задай функцію у вигляді таблиці та знайди область її значень.

а) $f(x)=3x-7,\ D(f)=\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 3\}$;

б) $g(x)=2x+\dfrac{3}{x},\ D(g)=\{-4;\ -2;\ 1;\ 3;\ 5\}$;

в) $h(x)=\dfrac{5-x}{3+x},\ D(h)=\{-4;\ -2;\ 0;\ 1;\ 3;\ 5\}$;

г) $u(x)=\dfrac{3}{2-x}+x-5,\ D(u)=\{-3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 3;\ 4\}$;

ґ) $v(x)=\dfrac{x-1}{2x}-3x,\ D(v)=\left\{-2;\ -1;\ -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2};\ 1;\ 2\right\}$.

www.e-ranok.com.ua

247. Функцію задано формулою $h(t)=\dfrac{1}{3t+2}$. Знайди $h(-2)$; $h(-1)$; $h(0)$; $h(1)$; $h(2)$.

248. Функцію задано формулою $f(x) = 3x - 4$. Знайди:

а) $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(3)$.

б) значення x, за якого $f(x)=-1$; $f(x)=0{,}5$.

249. Функцію задано формулою $g(u)=\dfrac{3-2u}{6}$. Знайди:

а) $g(-3)$; $g(-1{,}5)$; $g(0)$; $g(2)$; $g(4)$.

б) значення x, за якого $g(x)=0$; $g(x)=-0{,}5$.

250. Знайди область визначення функції:

а) $y=3x+2$;

б) $y=\dfrac{5}{3-x}$;

в) $g(x)=12-5x+\dfrac{6}{x-4}$;

г) $f(x)=\dfrac{12}{7+x}$;

г) $y=2x^2-3x+1$;

д) $y=3x-\dfrac{3}{x+1}$;

е) $y=\dfrac{3x+2}{x+2}$;

є) $y=\dfrac{5}{2x+1}$.

251. Знайди область визначення функції $f(z)$ та значення $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(3)$, якщо функцію задано формулою:

а) $f(z)=\dfrac{3-z}{2z+1}$;

б) $f(z)=\dfrac{2z+5}{5z-8}$.

www.e-ranok.com.ua

252. Знайди область визначення функції:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$;

б) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}$;

в) $f(x)=x^3+\dfrac{3}{x}$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{6}{x-4}$.

253. Знайди область визначення функції $y=\dfrac{18}{|x-2|+4}$.

254. Знайди область визначення функції $f(x)=\dfrac{3x^4-6x^2+5x+3}{x^2+4x+4}$.

www.e-ranok.com.ua

3.2. Графік функції

Ти стикався з прикладами графіків у 6 класі та знаєш, що для побудови графіка руху треба позначити на координатній площині точки, однією координатою яких є значення часу, а другою — відповідне значення довжини шляху.

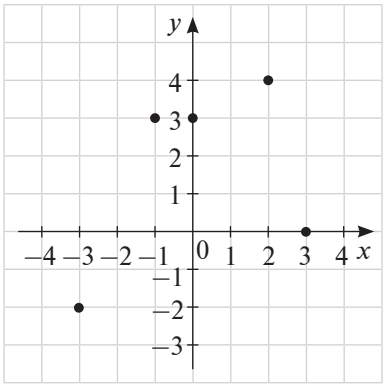
Графіком функції $y = f(x)$ називається множина всіх точок координатної площини, абсциса кожної з яких дорівнює значенню аргумента x, а ордината — відповідному значенню функції y.

Оскільки кожному значенню аргумента відповідає єдине значення функції, їх можна позначити точками на координатній площині. Якщо з'єднати ці точки, отримаємо графік функції.

Якщо область визначення функції містить скінченне число елементів, графіком функції є множина окремих точок.

Приклад 1. Побудуємо графік функції (див. рисунок), яку задано таблицею.

x	-3	-1	0	2	3
y	-2	3	3	4	0



Область визначення цієї функції містить скінченне число точок. Тому її графіком є п'ять точок координатної площини.

Область визначення функції може містити безліч точок, тобто мати вигляд відрізка, променя або прямої, про які тобі відомо з курсу геометрії.

www.e-ranok.com.ua

У цьому випадку графіком функції є лінія. Щоб побудувати цю лінію, треба обчислити координати деякої множини точок, що належать графіку, і з'єднати їх.

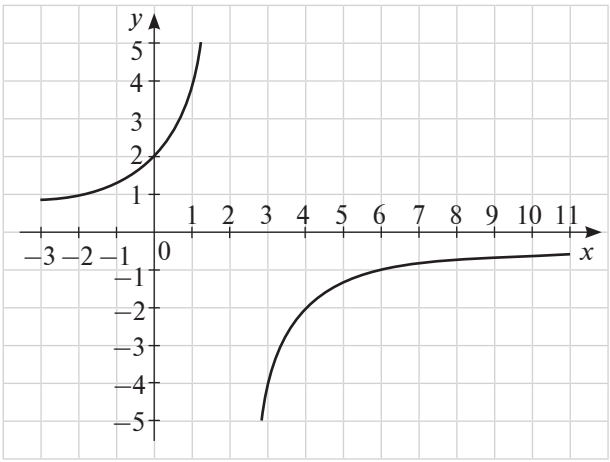
Приклад 2. Побудуємо графік функції $y = -\dfrac{4}{x-2}$.

Розв'язання.

Областю визначення цієї функції є всі числа, крім $x = 2$. Складемо таблицю значень функції, узявши «зручні» значення x.

x	-2	3	0	1	4	6	10
y	1	-4	2	4	-2	-1	$-\dfrac{1}{2}$

Нанесемо отримані точки на координатну площину та з'єднаємо їх (див. рисунок).



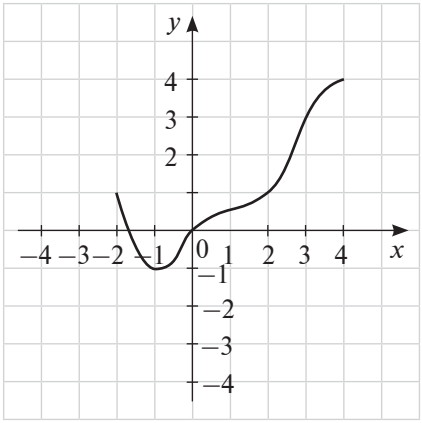
Оскільки x не може набувати значення 2, то графік функції не перетинає прямої, паралельної осі OY, яка проходить через точку з абсцисою 2. Функція не може набувати значення, що дорівнює нулю, тому графік не перетинає вісь OX.

Розглянемо докладніше графічний спосіб задання функції.

Лінію на координатній площині можна вважати графіком функції за умови, що кожному значенню аргумента відповідає єдине значення функції. За допомогою такого графіка можна знайти значення функції за заданим значенням аргумента і навпаки, значення аргумента — за заданим значенням функції; можна визначити область визначення і область значень функції.

www.e-ranok.com.ua

Приклад 3. На рисунку задано графік функції $y = f(x)$.



Знайди: а) $D(f)$ і $E(f)$; б) $f(2)$; в) значення x, за якого $f(x) = 3$.

Розв'язання.

а) Функцію $f(x)$ задано для $-2 \le x \le 4$, отже,
$D(f)$: $-2 \le x \le 4$.
Значення функції $f(x)$ лежать у межах: $-1 \le y \le 4$, отже,
$E(f)$: $-1 \le y \le 4$.

б) Через точку $(2; 0)$ проведемо лінію, паралельну осі OY, до перетину з графіком функції. Ордината точки перетину є шуканим значенням функції: $f(2) = 1$.

в) Через точку $(0; 3)$ проведемо лінію, паралельну осі OX, до перетину з графіком функції. Абсциса точки перетину є шуканим значенням аргумента: $f(x) = 3$, $x = 3$.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається графіком функції?
2. Згадай, як, користуючись графіком функції, визначити за заданим значенням x значення y і навпаки.
3. Як побудувати графік функції?

4*. Поміркуй, як за допомогою графіка функції знайти область визначення й область значень функції.

Дивись відеоматеріали

www.e-ranok.com.ua

255. Функцію задано за допомогою таблиці:

x	1	0	-4	6	-3	-5
y	-4	6	2	1	4	-6

Побудуй графік цієї функції.

256. Запиши область визначення функції, яку задано таблицею:

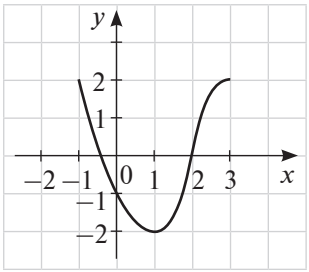
x	10	20	-14	16	-23	-15
y	-14	6	21	1	14	16

257. Функцію задано таблицею:

x	2,5	0	-1	6,5	-4	2
y	0	6	-3	2	2	-5

Побудуй графік цієї функції.

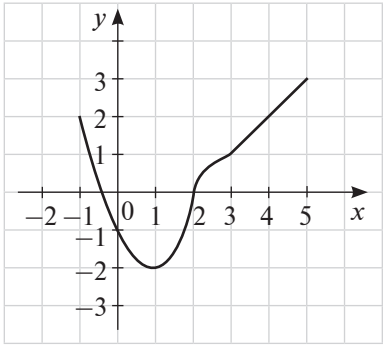
258. На рисунку зображено графік функції $y = g(x)$.



а) Знайди область визначення $D(g)$ і область значень $E(g)$ цієї функції.
б) Знайди $g(-1)$; $g(2)$; $g(3)$.
в) Знайди значення x, за яких $g(x) = -1$; $g(x) = -2$.

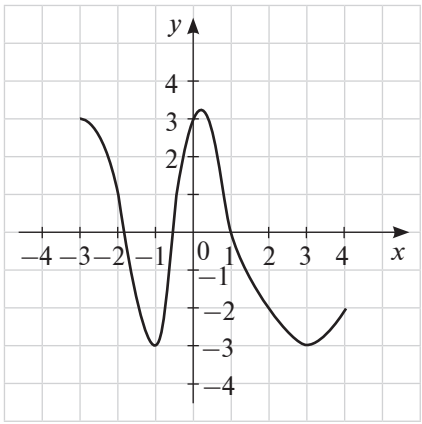
www.e-ranok.com.ua

259. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$.



а) Знайди область визначення $D(f)$ і область значень $E(f)$ цієї функції.
б) Знайди $f(0); f(2); f(3); f(5)$.
в) Знайди значення x, за яких $f(x) = 2; f(x) = 1$.

260. На рисунку зображено графік функції $h(x)$.



а) Знайди область визначення $D(h)$ і множину значень $E(h)$ цієї функції.
б) Знайди $h(-2)$; $h(0)$; $h(2)$; $h(4)$.
в) Знайди значення x, за яких $h(x) = -3$; $h(x) = -1$.

261. Побудуй графік функції $y = 2 - \frac{1}{2}x$, якщо $-2 \le x \le 6$.

262. Накресли графік функції $y = 2x - 1$, якщо $-2 \le x \le 3$. Обчисли значення функції для цілих значень x.

263. Накресли графік функції $y = \frac{3}{2}x + 2$, якщо $-4 \le x \le 2$.

www.e-ranok.com.ua

264. Два автомобілі одночасно виїхали з міста A. Перший рухався зі швидкістю 60 км/год, другий — зі швидкістю 80 км/год. Склади часову таблицю руху автомобілів із півгодинними проміжками для тригодинної поїздки. Накресли графіки їхнього руху в одній системі координат і визнач:

а) відстань між автомобілями через 1,5 год після початку руху;

б) час, через який відстань між автомобілями становитиме 50 км.

265. Побудуй графік функції $y = 1 + \frac{2}{x}$, якщо $-4 \le x \le -\frac{1}{2}$.

266. Побудуй графік функції $y = \frac{12}{x}$, якщо $1 \le x \le 12$. Використовуй тільки ті значення x, яким відповідають цілі значення y.

267. Функцію задано формулою $y = x^2$, де $-1 \le x \le 3$. Склади таблицю значень функції з кроком 1. Побудуй графік функції, використовуючи складену таблицю. Знайди за графіком значення аргумента, за яких значення функції додатні.

268. Чи належать графіку функції $y = x^2 - x + 1$ точки $A(0;\ 1)$; $B(1;\ 0)$; $C(2;\ 0)$; $D(1;\ 1)$; $E(-2;\ 6)$?

www.e-ranok.com.ua

269. Побудуй графік функції $y = \dfrac{2}{x+1}$, якщо $-4 \le x \le 3$.

270. Знайди область визначення функції $y = \dfrac{3-x}{x+2}$ і накресли її графік, якщо $-5 \le x \le 2$.

271. Побудуй графік функції $y = x + 2 - \dfrac{3}{x}$, якщо $-4 \le x \le -1$.

272. Побудуй графік функції $y = -\dfrac{1}{x+3}$.

273. Побудуй графік функції $y = |x|$, якщо $-4 \le x \le 4$.

274. Побудуй графік функції $y = x^3 + 1$.

www.e-ranok.com.ua

3.3. Лінійна функція

Збираючись до школи, ти, мабуть, дивишся на термометр за вікном. Температура на ньому вимірюється за шкалою Цельсія. В інших країнах, наприклад у США, температуру повітря вимірюють за шкалою Фаренгейта. Між цими шкалами є зв'язок. Якщо значення температури за шкалою Фаренгейта позначити як F, а за шкалою Цельсія — як C, має місце залежність: $F = 1{,}8C + 32$ — отримали функцію. Таку функцію називають **лінійною**.

Функція виду $y = kx + b$, де x — незалежна змінна, k і b — будь-які числа, називається лінійною функцією.

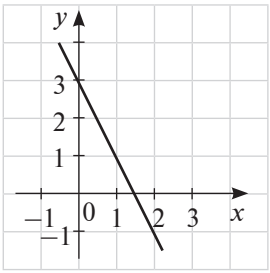
Наприклад, лінійними є функції $y = -0{,}5x + 1$; $y = \frac{1}{3}x + 4$; $y = 3x$; $y = 5 - 4x$.

Різні процеси в навколішньому світі описуються різними функціями, деякі з них ти вивчатимеш у наступних класах, а зараз розглядатимемо тільки лінійну функцію.

Приклад 1. Побудуємо графік функції $y = -2x + 3$.

Надаючи змінній x значень 0; 1; 2; -1; ..., знайдемо відповідні значення змінної y: 3; 1; -1; 5; ... .

Позначимо на координатній площині точки, координати яких відповідають цим парам чисел: (0; 3); (1; 1); (2; -1); (-1; 5) ... . Усі ці точки належать одній прямій (див. рисунок).



Графіком лінійної функції є пряма. Оскільки з курсу геометрії тобі відомо, що пряму однозначно визначають дві точки, то для побудови графіка лінійної функції достатньо знайти координати двох точок графіка, позначити їх на координатній площині та провести через них пряму.

З геометричним змістом коефіцієнта k, який називають **кутовим коефіцієнтом прямої**, ти познайомишся пізніше. Геометричний зміст коефіцієнта b такий: це ордината точки перетину графіка функції з віссю OY. Коефіцієнти k і b можуть набувати будь-яких значень.

www.e-ranok.com.ua

Наведемо **властивості лінійної функції**.

1. Оскільки формула $y = kx + b$ має зміст за будь-яких значень x, то областю визначення лінійної функції є множина всіх чисел.

2. Областю значень лінійної функції є множина всіх чисел або одне число (у випадку сталої функції).

3. При $k > 0$ графік лінійної функції утворює гострий кут із додатним напрямком осі OX (рис. 1), а при $k < 0$ — тупий (рис. 2).

$y = kx + b$, $k > 0$

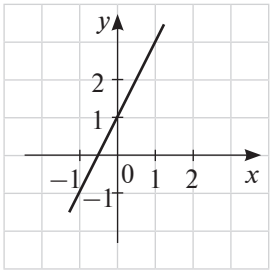


Рис. 1

$y = kx + b$, $k < 0$

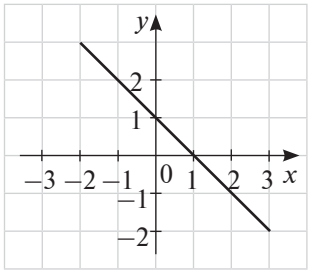


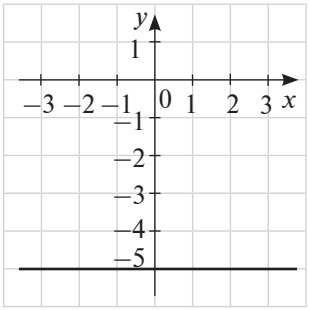
Рис. 2

4. При $k = 0$ формула $y = kx + b$ набуває вигляду $y = b$. Це означає, що за будь-якого значення x функція набуває одного й того самого значення $y = b$. Графік функції в цьому випадку являє собою паралельну осі OX пряму, яка проходить через точку $(0; b)$. Зокрема, якщо $b = 0$, то графіком функції буде вісь OX.

Приклад 2. Побудуємо графік функції $y = -5$.

Розв'язання.

Згідно з четвертою властивістю лінійної функції, графіком функції $y = -5$ буде пряма, паралельна осі OX, яка проходить через точку $(0; -5)$ (див. рисунок).



Приклад 3. Не виконуючи побудови графіка, знайдемо координати точок перетину графіка функції $y = 2{,}5x - 10$ з осями координат.

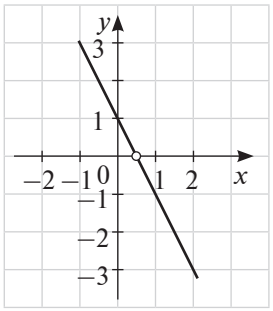
www.e-ranok.com.ua

Розв'язання.
Графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь OX у точці, яка є розв'язком рівняння $f(x) = 0$:
$2{,}5x - 10 = 0;$
$2{,}5x = 10;$
$x = 4.$
Точка перетину графіка з віссю OX має координати (4; 0).
Тепер, підставивши у формулу 0 замість x, отримаємо:
$2{,}5 \cdot 0 - 10 = -10.$
Точка перетину графіка з віссю OY має координати (0; −10).
Відповідь: (0; −10); (4; 0).

Приклад 4. Побудуємо графік функції $y = 1 - 2x$, якщо відомо, що областю визначення функції є всі числа, крім $x = \frac{1}{2}$.

Розв'язання.

x	0	1
y	1	−1



Задана функція в точці $x = \frac{1}{2}$ не визначена. Тому точка з абсцисою $\frac{1}{2}$ не належить графіку функції (див. рисунок). У цьому випадку таку точку будемо позначати на графіку порожнім кружечком і говорити, що $x = \frac{1}{2}$ — **виколота точка**.

Приклад 5. Побудуємо графік функції $y = x + |x|$.

Розв'язання.
Розглянемо два випадки:
1) $x \geq 0$, тоді $y = x + x$; $y = 2x$;
2) $x < 0$, тоді $y = x - x$; $y = 0$.
Таким чином, можна задати функцію так:

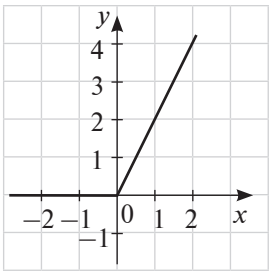
$$y = \begin{cases} 2x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ 0, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

www.e-ranok.com.ua

Побудуємо графік функції $y=2x$ і залишимо тільки ту його частину, для якої значення аргумента невід'ємні.

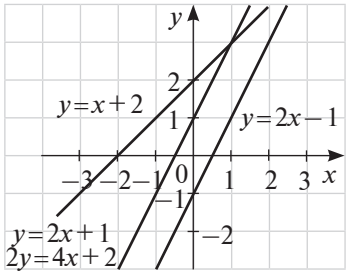
x	0	1
y	0	2

Для від'ємних значень аргумента графіком є ліва піввісь осі OX. Графік функції $y=x+|x|$ побудовано (див. рисунок).



Як тобі вже відомо з геометрії, дві прямі на площині можуть перетинатися в одній точці, бути паралельними або збігатися. Наприклад, збігатимуться графіки функцій $y=2x+1$ та $y=\dfrac{4x+2}{2}$.

Побудуємо в одній координатній площині графіки функцій $y=2x+1$, $y=2x-1$, $2y=4x+2$, $y=x+2$.



Бачимо, що графіки функцій $y=2x+1$ і $y=2x-1$ паралельні, графіки функцій $y=2x+1$ і $y=x+2$ перетинаються, графіки функцій $y=2x+1$ і $2y=4x+2$ збігаються. (Зазначимо, що, поділивши обидві частини рівності $2y=4x+2$ на 2, отримаємо $y=2x+1$.)

Графіки функцій $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$ збігаються тоді і тільки тоді, коли $k_1=k_2$, а $b_1=b_2$; паралельні тоді і тільки тоді, коли $k_1=k_2$, а $b_1\neq b_2$; перетинаються тоді і тільки тоді, коли $k_1\neq k_2$.

Побудуй самостійно графіки функцій $y=-3x+4$; $y=-3x$; $y=-3x-2{,}5$ в одній системі координат. Зроби висновок про їх взаємне розташування.

www.e-ranok.com.ua

Приклад 6. Задамо формулою лінійну функцію, графік якої паралельний прямій $y = -3x - 1$ та проходить через точку $M(-2; 10)$.

Розв'язання.

Оскільки графік функції паралельний прямій $y = -3x - 1$, то кутовий коефіцієнт $k = -3$, тобто $y = -3x + b$.

Оскільки графік проходить через точку $M(-2; 10)$, то координати цієї точки задовольняють це рівняння:

$10 = -3 \cdot (-2) + b$; $10 = 6 + b$; $b = 4$.

Маємо: $y = -3x + 4$.

Відповідь: $y = -3x + 4$.

Розглянемо окремий випадок лінійної функції, коли $b = 0$. Маємо $y = kx$. Таку функцію називають **прямою пропорційністю**.

Наприклад, $y = -4x$; $y = 0{,}3x$; $y = x$ — прямі пропорційності.

Прямою пропорційністю називається функція виду $y = kx$, де x — незалежна змінна, $k \neq 0$.

При $x = 0$ маємо $y = 0$, тому графік прямої пропорційності проходить через початок координат. У цьому випадку для побудови графіка достатньо знайти координати ще однієї точки, відмінної від нуля.

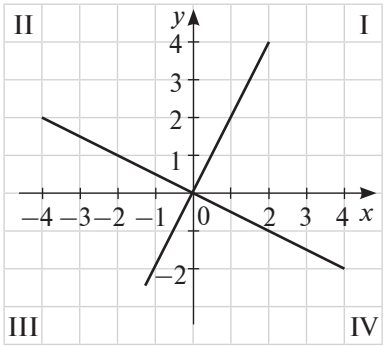
Побудуємо графіки функцій $y = 2x$ та $y = -\frac{1}{2}x$.

$y = 2x$

x	1
y	2

$y = -\frac{1}{2}x$

x	2
y	-1



Наведемо **властивості функції $y = kx$**.

1. **Пряма пропорційність має всі властивості лінійної функції.**
2. **Графіком прямої пропорційності є пряма, що проходить через початок координат.**
3. **При $k > 0$ графік розташований у I і III координатних чвертях, а при $k < 0$ — у II і IV (див. рисунок).**

www.e-ranok.com.ua

Приклад 7. Задамо формулою пряму пропорційність, якщо відомо, що її графік проходить через точку $M(2; -7)$.

Розв'язання.
Оскільки графік функції $y = kx$ проходить через точку $M(2; -7)$, то $-7 = 2k$, і тоді $k = -3{,}5$.
Одержуємо: $y = -3{,}5x$.
Відповідь: $y = -3{,}5x$.

Запитання для самоконтролю

1. Яка функція називається лінійною?
2. Що є графіком лінійної функції, як його побудувати?
3. Наведи властивості лінійної функції.
4. Як знайти точки перетину графіка лінійної функції з осями координат?
5. У якому випадку графіки двох лінійних функцій збігаються? перетинаються? паралельні?
6. Як знайти координати точок перетину графіків лінійних функцій?
7. Яка функція називається прямою пропорційністю?
8. Наведи властивості функції $y = kx$.
9*. Поміркуй, чому якщо графіки лінійних функцій паралельні, то їх кутові коефіцієнти однакові?

Дивись відеоматеріали

275. Які із заданих функцій є лінійними?

а) $y = 2x - 3$; в) $y = 7 - 9x$; г) $y = x^2 - 6$;

б) $y = \frac{x}{2} + 1$; г) $y = \frac{2}{x} + 1$; д) $y = \frac{8x - 7}{4}$.

www.e-ranok.com.ua

276. Лінійну функцію задано формулою $y = 0{,}5x + 6$. Знайди:

а) значення функції, якщо значення аргумента x дорівнює -12; 0; 34;

б) значення аргумента, якщо значення функції y дорівнює -16; 8; 0.

277. Побудуй графік функції:

а) $y = x - 3$;

б) $y = 3x + 1$;

в) $y = \frac{1}{3}x - 3$;

г) $y = 0{,}8x + 2$;

г) $y = -x - 2$;

д) $y = 5 - \frac{1}{4}x$.

278. Побудуй графік функції $y = -1{,}5x + 3$. За графіком визнач:

а) значення y, що відповідають значенням $x = -2{,}5$; $x = 4$;

б) значення x, яким відповідають $y = -4{,}5$; $y = 0{,}5$.

279. Чи проходить графік функції $y = 2{,}4x - 3$ через точки $A(-3; -10{,}2)$; $B(2{,}5; 0{,}6)$; $C(1; -0{,}4)$; $D(5; 15)$?

280. Побудуй в одній системі координат графіки функцій:

$y = 5$; $y = -6$; $y = \frac{1}{2}$.

281. Чи є прямою пропорційністю функція, задана формулою?

а) $y = -6x$; б) $y = 8x^2$; в) $y = \frac{6}{x}$; г) $y = x + 7$.

282. Побудуй графік функції:

а) $y = 3x$;

б) $y = -\frac{1}{3}x$;

в) $y = -x$;

г) $y = x$;

г) $y = -0{,}2x$;

д) $y = -4x$.

283. Функцію задано формулою $y = -\frac{1}{6}x$. За графіком знайди:

а) значення y, які відповідають значенням $x = -9$; $x = 0$; $x = 1$; $x = 6$;

б) значення x, які відповідають значенням $y = 0$; $y = -\frac{1}{3}$; $y = 10$; $y = -1$.

284. У яких координатних чвертях розташовано графік функції?

а) $y = 5{,}2x$;

б) $y = -4x$;

в) $y = 0{,}7x$;

г) $y = 2{,}8x$.

www.e-ranok.com.ua

285. Лінійні функції задано формулами:

а) $y = -20x + 13$;
б) $y = 3{,}6x + 13$;
в) $y = -3{,}6x - 2$;
г) $y = -20x - 1$;
ґ) $y = -3{,}6x - 4$;
д) $y = 20x + 13$.

Назви ті з них, графіки яких паралельні один одному.

286. Не виконуючи побудови, знайди координати точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з осями координат, якщо:

а) $y = -2{,}4x + 9{,}6$;
б) $y = \frac{2}{7}x + 4$;
в) $y = 1{,}2x + 6$;
г) $y = 5 - 3x$.

287. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 4x - 8$, знайди точки цього графіка,

а) абсциси яких дорівнюють ординатам;
б) абсциси яких протилежні ординатам;
в) ординати яких у два рази більші за абсциси.

288. Графік функції $y = kx + b$ перетинає осі координат у точках $A(0; -3)$ та $B(1; 0)$. Знайди значення k і b.

289. Графік функції $y = kx + b$ паралельний осі абсцис і проходить через точку $A(2; -1)$. Знайди значення k і b.

290. Задай формулою пряму пропорційність, якщо відомо, що її графік проходить через точку $M(2; -10)$.

291. Задай формулою лінійну функцію, графік якої проходить через початок координат паралельно прямій $y = 12x - 10$.

292. Задай формулою лінійну функцію, графік якої паралельний прямій $y = -x + 3$ і проходить через точку $M(-1; 7)$.

www.e-ranok.com.ua

293. Знайди координати точок перетину графіків функцій, не виконуючи побудови графіків:

а) $y = 20x - 70$ і $y = 70x + 30$;

б) $y = 14x$ і $y = x + 26$;

в) $y = 5x + 16$ і $y = -6$;

г) $y = 6 - \frac{2}{3}x$ і $y = \frac{8}{3}x - 14$.

294. Задай формулою лінійну функцію, графік якої паралельний прямій $y = -4x + 3$ і перетинається з графіком функції $y = 10x - 17$ у точці, що належить осі ординат.

295. Вартість вхідного квитка в музей становить 20 грн, а послуги екскурсовода для групи коштують 50 грн. Обчисли вартість відвідування музею групою з 10 осіб, 15 осіб, 25 осіб. Виведи залежність вартості відвідування від кількості членів групи.

296. Побудуй графік функції:

а) $y = \begin{cases} -2x - 3, \text{ якщо } x \geq 0, \\ x - 3, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 3, \text{ якщо } x < -2, \\ -2x - 1, \text{ якщо } -2 \leq x < 2, \\ -5, \text{ якщо } x \geq 2. \end{cases}$

297. Побудуй графік функції:

а) $y = |x|$;

б) $y = |x| - x$;

в) $y = |x - 3|$;

г) $y = |x + 3|$.

298. Побудуй графік функції:

а) $y = \begin{cases} 3, \text{ якщо } x > 0, \\ -3, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 2, \text{ якщо } x = 0, \\ -2, \text{ якщо } x \neq 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 2x, \text{ якщо } x \geq 1, \\ 2, \text{ якщо } 0 \leq x < 1, \\ x + 2, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

www.e-ranok.com.ua

3.4. З історії виникнення й розвитку поняття «функція»

Витоки поняття функції сягають тієї далекої епохи, коли люди почали розуміти, що навколишні явища взаємозалежні. Ще не вміючи рахувати, вони вже знали: що більше оленів удасться вполювати, то довше плем'я не знатиме голоду; що сильніше натягнуто тятиву лука, то далі полетить стріла; що довше горітиме багаття, то тепліше буде в наметі.

Коли виникли перші цивілізації, почалося будівництво гігантських пірамід, учені стали складати таблиці для полегшення обчислень. Збереглися числові таблиці Давнього Вавилону для функцій $y = \frac{1}{x}$; $y = x^2$; $y = x^3$; $y = x^2 + x^3$.

Поняття змінної величини запровадив французький учений і математик ***Рене Декарт****. Він висловив ідею числової функції числового аргумента; став застосовувати букви для запису залежностей між величинами; започаткував геометричне зображення не тільки пар чисел, але й рівнянь, що позв'язують два числа. У своїй «Геометрії» 1637 р. Декарт дав поняття функції як зміни ординати точки залежно від зміни її абсциси. Він систематично розглядав лише ті криві, які можна було точно задати за допомогою рівнянь, причому переважно алгебраїчних. Поступово поняття функції стало ототожнюватися з поняттям аналітичного виразу — формули.*

Одночасно з Декартом існування відповідності між лініями та рівняннями відзначив інший французький математик — ***П'єр Ферма****. Він був радником тулузького парламенту, а математичними дослідженнями займався лише*

Р. Декарт
(1596–1650)

П. Ферма
(1601–1665)

І. Ньютон
(1642–1727)

www.e-ranok.com.ua

Г. Лейбніц
(1646–1716)

Й. Бернуллі
(1667–1748)

М. Лобачевський
(1792–1856)

у вільний час. Проте Ферма одержав низку видатних результатів у різних галузях математики.

1671 р. ***Ісаак Ньютон*** *став розуміти функцію як змінну величину, яка змінюється з часом. У своїх роботах він уживав спеціальні терміни: називав незалежну змінну «співвіднесеною кількістю» (quantitas correlata), а залежну змінну — «віднесеною кількістю» (quantitas relata).*

Термін «функція» почали застосовувати у XVIII ст. німецький математик ***Готфрід Вільгельм Лейбніц*** *та його учні.*

У працях Декарта, Ферма, Ньютона та Лейбніца поняття функції мало, власне кажучи, інтуїтивний характер і було пов'язане або з геометричними, або з механічними уявленнями — ординати точок кривих є функціями від абсцис; шлях та швидкість є функціями від часу тощо.

Означення функції, наближене до сучасного, дав ***Йоганн Бернуллі****: «Функцією змінної величини називається кількість, що утворена яким завгодно способом із цієї змінної величини та постійних».*

Ми користуємося означенням, близьким до того, яке дав видатний математик ***Микола Іванович Лобачевський*** *1834 р.: «Загальне поняття функції вимагає, щоб функцією від* ***x*** *називати число, яке надається для кожного* ***x*** *і разом з* ***x*** *поступово змінюється. Значення функції може бути задане або аналітичним виразом, або умовою, яка надає засіб випробовувати всі числа й обирати одне з них; або, нарешті, залежність може існувати й залишатися невідомою».*

www.e-ranok.com.ua

Завдання для тематичного самоконтролю

1. Знайди область визначення функції:

а) $y = -1{,}5x + 2$;

б) $y = \dfrac{2}{x+1}$.

2. Чи проходить графік функції $y = -3x + 4$ через точку $A(2; 2)$?

3. Побудуй графік функції:

а) $y = 2x$;

б) $y = -x + 3$;

в) $y = 5$.

4. Не виконуючи побудови, знайди координати точок перетину графіка функції $y = 1{,}3x - 1{,}69$ з осями координат.

5. Задай формулою лінійну функцію, графік якої паралельний прямій $y = -x + 2$ і проходить через точку $B(-2; 4)$.

6. Побудуй графік функції $y = |x - 2|$.

Пройди онлайн-тестування

www.e-ranok.com.ua

Завдання підвищеної складності

1. Побудуй графік функції $y = \dfrac{3x-3}{x^2-5x+6}$, якщо $-4 \le x \le 5$.

2. Побудуй графік функції:

а) $y = \dfrac{x+3}{x+3}$;

б) $y = \dfrac{x+3}{x+3} + x$;

в) $y = \dfrac{3x-1}{3x-1} + 1$;

г) $y = \dfrac{x}{|x|}$.

3. Площа прямокутника дорівнює S. На скільки відсотків зменшиться ширина прямокутника, якщо його довжина збільшиться на 60 %, а площа не зміниться?

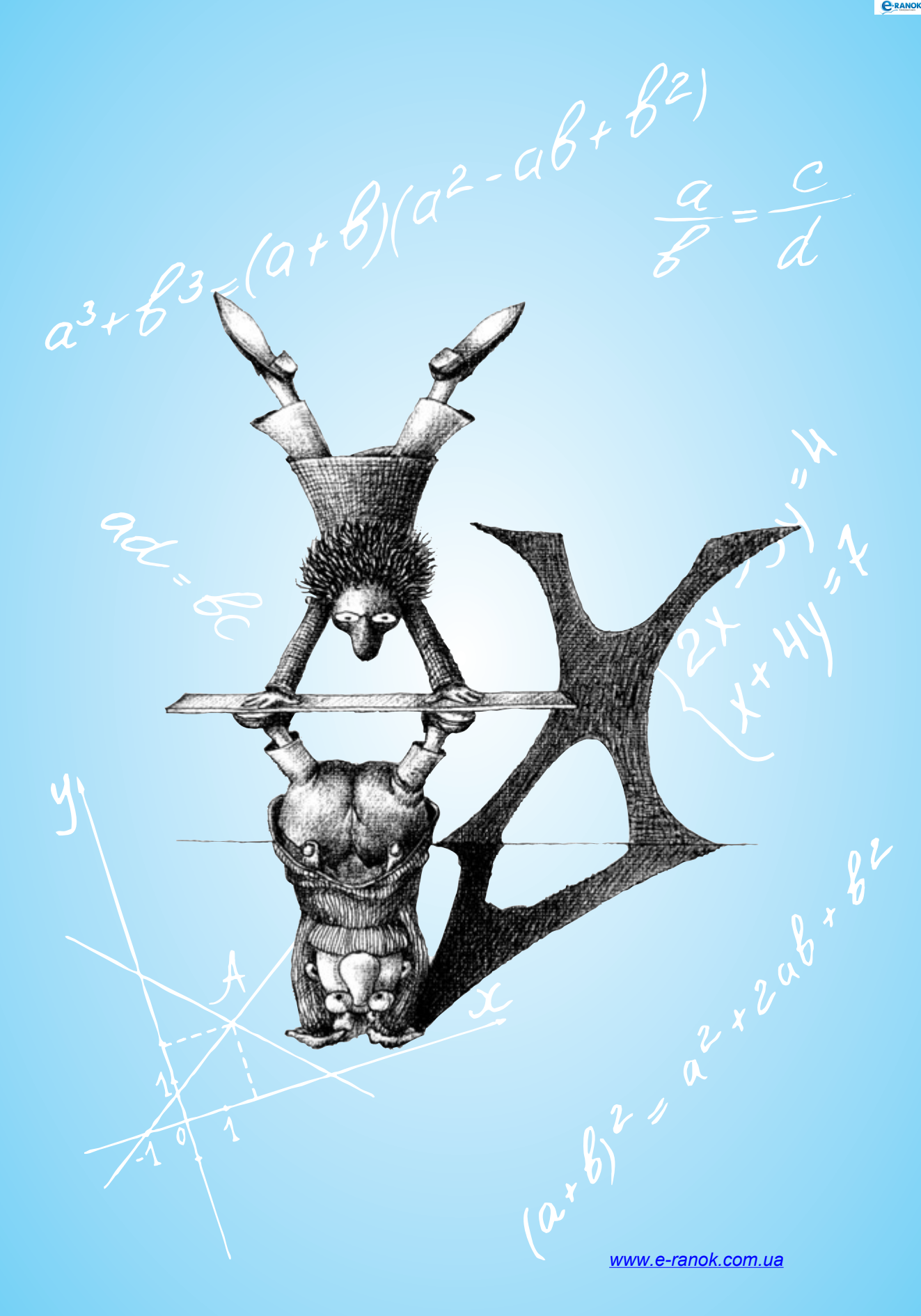
4. Цеглина, яка має форму прямокутного паралелепіпеда, важить 4 кг. Скільки важитиме цеглина, кожний вимір якої в чотири рази менший?

5. Петрик поїхав до літнього табору й попросив маму доглядати за рибками. Рівень води в акваріумі дорівнював усього 32 см, і мама вирішила долити туди 3 л води. Після цього до верху акваріума ще залишилося 5 см. Знайди об'єм акваріума, якщо одна сторона його прямокутного дна дорівнює 40 см, а друга становить $\dfrac{5}{8}$ від неї.

6. Як за три зважування на важільних терезах без важків визначити, яка з 27 золотих монет фальшива, якщо відомо, що вона важча за справжню?

7. Туристи взяли в тритижневий похід 28 кг сухарів і розділили їх на однакові денні порції. Наприкінці десятого дня з'ясувалося, що похід триватиме на один день довше, ніж передбачалося. Туристи знову розділили сухарі, що лишилися, на однакові порції. Знайди величину денної порції сухарів наприкінці походу.

www.e-ranok.com.ua



www.e-ranok.com.ua

ГЛАВА 4. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

4.1. Рівняння та його корені. Основні властивості рівнянь

Під час розв'язування багатьох задач буває зручно скласти рівність, яка містить невідому величину (змінну). Таку рівність називають рівнянням.

Рівнянням називається рівність, що містить принаймні одну змінну.

Наприклад: $x + 2 = 5$; $x^2 = 9$; $x + y = 6$.

Перші два рівняння містять одну змінну, їх називають **рівняннями з однією змінною**, а третє — дві, це **рівняння з двома змінними**. У цій главі ми будемо розглядати тільки рівняння з однією змінною.

Розглянемо рівняння $x - 3 = 4$. Якщо $x = 7$, то це рівняння перетворюється на правильну числову рівність. Кажуть, що 7 — це корінь, або розв'язок, даного рівняння.

Усі значення змінної, за яких рівняння перетворюється на правильну числову рівність, називаються розв'язками, або коренями, рівняння.

Рівняння може мати один, декілька, безліч коренів або взагалі їх не мати.

Приклад 1. Рівняння $x + 5 = 2$ перетворюється на правильну числову рівність, якщо $x = -3$; тоді $-3 + 5 = 2$, отже, $x = -3$ — корінь цього рівняння.

Приклад 2. Рівняння $x^2 = 16$ перетворюється на правильну числову рівність, якщо $x = 4$ або $x = -4$, оскільки $(-4)^2 = 4^2 = 16$. Отже, $x = 4$, $x = -4$ — корені цього рівняння.

Приклад 3. Рівняння $(x - 2)(x + 3)(x - 1) = 0$ перетворюється на правильну числову рівність при $x = 2$; $x = -3$; $x = 1$. Це корені поданого рівняння.

www.e-ranok.com.ua

Приклад 4. Рівняння $0 \cdot x = 5$ узагалі не має розв'язків, оскільки немає такого значення x, за якого воно перетворюється на правильну числову рівність.

Приклад 5. Рівність $0 \cdot x = 0$ є правильною за будь-якого значення x, тому це рівняння має безліч коренів.

Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.

У процесі розв'язання рівнянь виконують різні перетворення — розкривають дужки, зводять подібні доданки тощо.

Згадаємо **основні властивості рівнянь**, які ти вивчав у 6 класі.

Якщо:
- **частини рівняння поміняти місцями;**
- **до обох частин рівняння додати (або відняти від них) той самий вираз;**
- **члени рівняння перенести з однієї частини в іншу, змінивши при цьому їхні знаки на протилежні;**
- **обидві частини рівняння помножити (розділити) на той самий відмінний від нуля вираз,**

то отримаємо рівняння, яке має такі самі корені, що й дане.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається рівнянням?
2. Що таке корені рівняння?
3. Що означає розв'язати рівняння?
4. Сформулюй основні властивості рівнянь.

5*. Чому не є правильним твердження: «Якщо обидві частини рівняння помножити на нуль, то отримаємо рівняння, яке має такі самі корені, що й дане»?

Дивись відеоматеріали

www.e-ranok.com.ua

299. Перевір, які з поданих чисел є коренями рівняння:

а) $4(x - 3) = x + 6$ — числа 0; -2; 6;
б) $3(x - 2) = x + 2$ — числа -1; 0; 4;
в) $(x + 1)(4 - x) = 0$ — числа -1; 2; 4;
г) $x^2 - 4 = 0$ — числа 2; 4; -2.

300. Використовуючи основні властивості рівнянь, визнач, які з поданих рівнянь є рівносильними:

а) $2x = 16$ та $3x - 15 = 9$;
б) $2x + 1 = 3$ та $x - 1 = -2$;
в) $3x - 1 = 8$ та $x + 2 = 4$;
г) $x = -\frac{1}{2}$ та $3 = -6x$;
ґ) $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = 0$ та $2x = 4$.

301. Перенеси всі члени рівняння в ліву частину і зведи подібні доданки:

а) $12x - 5 = 3x + 5$;
б) $5x + 7 = 8x + 3$;
в) $6 - 9x = 11 - 16x$;
г) $4x + 13 = x + 21$;
ґ) $7x - 3 = 9x + 4$;
д) $15x - 1 = 3x - 2$.

302. Перенеси всі ті члени рівняння, що містять змінну, в ліву частину, а ті, що не містять,— у праву. Зведи подібні доданки:

а) $4x + 5 = 3x + 8$;
б) $3 - 2x = 8x + 7$;
в) $15x + 9 = 11x - 2$;
г) $4 - 12x = 3 - 15x$;
ґ) $2x - 3 = 5x + 8$;
д) $14x - 5 = 4 + 9x$.

303. Розкрий дужки. Перенеси всі ті члени рівняння, що містять змінну, в ліву частину, а ті, що не містять,— у праву. Зведи подібні доданки:

а) $7(2 + y) - 3y = 5y - 6$;
б) $4x - 2(3 + x) = 9 - x$;
в) $17 + 3(15 - c) = (4 - c) - 2(c - 5)$;
г) $-3(5y - 1) + 4y = 2y + 7(5 - 3y)$.

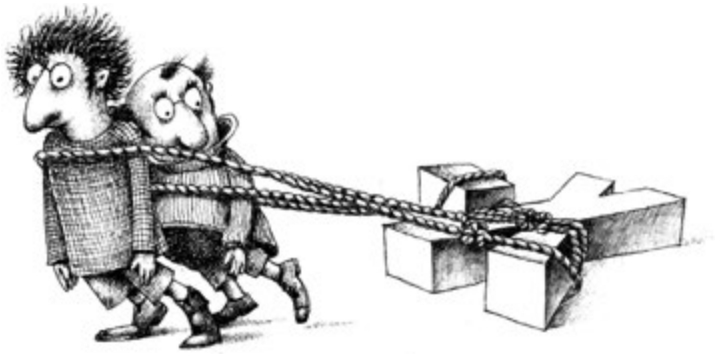
www.e-ranok.com.ua

304. Розділи обидві частини рівняння на їхній найбільший спільний дільник:

а) $3x = 42$;
б) $-4x = 12$;
в) $-5x = -20$;
г) $4x - 8 = 24$;
ґ) $9x - 15 = 6x$;
д) $14x = 21(x + 2)$.

305. Помнож обидві частини рівняння на їхній спільний знаменник:

а) $\frac{3}{4}x = \frac{5}{8}$;
б) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$;
в) $\frac{3}{8}(x - 1) = \frac{7}{12}$;
г) $\frac{4}{5} = \frac{2}{15}(2x + 1)$;
ґ) $\frac{x}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$;
д) $\frac{2}{7}(x - 3) = \frac{1}{3}(2x + 3)$;
е) $\frac{1}{6}(3x + 1) = \frac{5}{8}(x - 2)$;
є) $\frac{3x}{4} - \frac{2}{3} = \frac{x}{6} + \frac{3}{4}$.



www.e-ranok.com.ua

4.2. Лінійне рівняння з однією змінною

Рівняння виду $ax + b = 0$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називається лінійним рівнянням.
Число a називається коефіцієнтом при змінній x, число b — вільним членом.

Рівняння виду $ax + b = 0$ називають лінійним, тому що його ліва частина є лінійною функцією.

Нехай $a \neq 0$. Перенесемо вільний член рівняння $ax + b = 0$ у праву частину, отримаємо: $ax = -b$. Розділимо обидві частини рівняння на a:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Якщо рівняння можна звести до вигляду $f(x) = 0$, де $f(x)$ — многочлен, то таке рівняння в математиці називають **алгебраїчним рівнянням**. (Надалі, у 7 класі, будемо розглядати тільки алгебраїчні рівняння й називатимемо їх просто рівняннями.) Степінь цього многочлена називають **степенем рівняння**.

Лінійне рівняння виду $ax + b = 0$, коли $a \neq 0$ є рівнянням першого степеня з однією змінною.
Рівняння першого степеня з однією змінною має єдиний корінь.

Нехай $a = 0$, тоді рівняння $ax + b = 0$ набуває вигляду $0 \cdot x = -b$. Розглянемо два випадки.

1. Якщо $b \neq 0$, це рівняння не перетворюється на правильну рівність за жодного значення x, отже, не має розв'язків.
2. Якщо $b = 0$, отримаємо рівняння $0 \cdot x = 0$ — воно є правильною рівністю за будь-якого значення x, отже, рівняння має безліч розв'язків.

Рівняння $ax + b = 0$
при $a = 0$ та $b \neq 0$ не має розв'язків;
при $a = 0$ та $b = 0$ має безліч розв'язків.

Розглянемо приклади розв'язування рівнянь.

Приклад 1. $0{,}4(6 - 4x) = 0{,}5(7 - 3x) - 1{,}9$.

Розв'язання.

Розкриємо дужки:

$2{,}4 - 1{,}6x = 3{,}5 - 1{,}5x - 1{,}9$.

Перенесемо доданки, що містять змінну, в ліву частину, а ті, що не містять, — у праву:

www.e-ranok.com.ua

$-1{,}6x + 1{,}5x = 3{,}5 - 1{,}9 - 2{,}4;$
$-0{,}1x = -0{,}8.$
Розділимо обидві частини рівняння на $-0{,}1$:
$x = -0{,}8 : (-0{,}1);$
$x = 8.$
Перевірка.
$0{,}4(6 - 4 \cdot 8) = 0{,}5(7 - 3 \cdot 8) - 1{,}9;$
$0{,}4 \cdot (-26) = 0{,}5 \cdot (-17) - 1{,}9;$
$-10{,}4 = -10{,}4.$
Рівняння перетворюється на правильну числову рівність.
Відповідь: 8.

Приклад 2. $\frac{2x - 5}{3} = \frac{x + 3}{4} - \frac{7}{6}.$

Розв'язання.
Щоб спростити обчислення, помножимо обидві частини рівняння на їхній спільний знаменник:

$$\frac{2x - 5}{3} = \frac{x + 3}{4} - \frac{7}{6} \Bigg| \cdot 12;$$

$$12 \cdot \frac{2x - 5}{3} = 12 \cdot \frac{x + 3}{4} - 12 \cdot \frac{7}{6};$$
$$\frac{12}{3} \cdot (2x - 5) = \frac{12}{4} \cdot (x + 3) - \frac{12}{6} \cdot 7.$$

Скоротивши дроби, отримаємо:
$4(2x - 5) = 3(x + 3) - 14.$
Далі розкриємо дужки й зведемо подібні доданки:
$8x - 20 = 3x + 9 - 14;$
$8x - 3x = 9 - 14 + 20;$
$5x = 15;$
$x = 15 : 5;$
$x = 3.$
Відповідь: 3.

Приклад 3. $\frac{x - 2}{3} + \frac{x + 5}{6} = \frac{x}{2}.$

Розв'язання.
Помножимо обидві частини рівняння на їхній спільний знаменник 6 і скоротимо дроби:
$2(x - 2) + x + 5 = 3x.$

www.e-ranok.com.ua

Розкриємо дужки, зведемо подібні доданки:
$2x - 4 + x + 5 = 3x;$
$2x + x - 3x = 4 - 5;$
$0 \cdot x = -1.$
Рівняння не має розв'язків.
Відповідь: коренів немає.

Приклад 4. $1{,}5(x - 2) + 1 = 2(3 - x) + 3{,}5x - 8.$

Розв'язання.
$1{,}5x - 3 + 1 = 6 - 2x + 3{,}5x - 8;$
$1{,}5x + 2x - 3{,}5x = 6 - 8 + 3 - 1;$
$0 \cdot x = 0.$
Рівність правильна за будь-якого значення змінної x.
Відповідь: безліч коренів.

Приклад 5. $5(x - 4) - 3|x| = 4.$

Розв'язання.
Це рівняння містить модуль змінної, тому розглянемо два випадки.
1. При $x \geq 0$ маємо $|x| = x$, тому рівняння набуває вигляду:
$5(x - 4) - 3x = 4.$
Розкриємо дужки та розв'яжемо рівняння:
$5x - 20 - 3x = 4;$
$5x - 3x = 4 + 20;$
$2x = 24;$
$x = 24 : 2;$
$x = 12.$
Число 12 задовольняє умову $x \geq 0$, тому воно є розв'язком поданого рівняння.
2. При $x < 0$ маємо $|x| = -x$, тому рівняння набуває вигляду:
$5(x - 4) - 3(-x) = 4.$
Розкриємо дужки та розв'яжемо рівняння:
$5x - 20 + 3x = 4;$
$5x + 3x = 4 + 20;$
$8x = 24;$
$x = 24 : 8;$
$x = 3.$
Число 3 не задовольняє умову $x < 0$, тому воно не може бути розв'язком поданого рівняння.
Відповідь: 12.

www.e-ranok.com.ua

Запитання для самоконтролю

1. Яке рівняння називається лінійним?
2. У якому випадку лінійне рівняння є рівнянням першого степеня?
3. Скільки коренів має рівняння першого степеня?
4. Які розв'язки має рівняння $ax + b = 0$ у випадку, коли $a = 0$?
5. Опиши, як розв'язувати лінійні рівнянння з однією змінною.

6*. Поясни, як розв'язувати рівняння, які містять змінну під знаком модуля.

Дивись відеоматеріали

306. Які з поданих рівнянь є лінійними?

а) $2x + 6 = 0$;

б) $x^2 - 1 = 5$;

в) $\frac{3x}{2} + 5 + \frac{x}{3} = \frac{1}{6}$;

г) $3{,}5(x - 4) + 1 = 7(x + 2)$;

ґ) $(x - 2)(4 + x) = 7$;

д) $\frac{3}{x} + 4 = 6x$.

307. Розв'яжи рівняння:

а) $3x = 21$;

б) $3x - 7 = 8$;

в) $5 - 3x = -16$;

г) $x + 5 = 4x - 1$;

ґ) $2 - 3x = 30 - 7x$;

д) $36 - 3x = 4 + 5x$.

308. Знайди корені рівняння:

а) $3x + 2 + 2x = 12$;

б) $x + 3 - 6x = 7 - 49$;

в) $27 + 2x - 5 = 8x + 13 - 3x$;

г) $4(2x - 3) = 2(3x - 8)$;

ґ) $14(2x + 3) = 35(12 - x)$;

д) $12(3x - 7) = 16(x - 9)$.

309. Розв'яжи рівняння:

а) $3(x - 4) + 6(3 - 2x) = 0$;

б) $5(2x - 8) - 3(2 - 5x) = 4$;

в) $5(4x - 5) - 4(9 - 2x) = -5$;

г) $3x + 2(2x - 5) = -8$;

ґ) $3(x - 4) - 6 = 5(x - 3)$;

д) $68 - 3x = 3 + 4(2x - 3)$.

www.e-ranok.com.ua

310. Розв'яжи рівняння:

а) $\frac{x}{3}+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$;

б) $\frac{x}{5}+\frac{2x}{3}=2\frac{3}{5}$;

в) $\frac{2x}{5}-\frac{5x}{8}=-\frac{3}{10}$;

г) $\frac{2x}{9}-\frac{3}{4}=-\frac{47}{72}+\frac{5x}{12}$;

ґ) $\frac{2x}{5}-\frac{1}{15}=\frac{x}{3}-\frac{2}{45}$;

д) $\frac{5x}{7}-\frac{2}{3}=3\frac{11}{21}-\frac{x}{3}$.

311. Розв'яжи рівняння:

а) $0{,}8(x+2)=1{,}92$;

б) $3{,}6+5y=7(1{,}2-y)$;

в) $0{,}5(x-6)+5=2x-7$;

г) $3{,}4+2y=7(y-2{,}3)$;

ґ) $0{,}2(7-2y)=2{,}3-0{,}3(y-6)$;

д) $5(0{,}14-0{,}23y)+3(0{,}3y+0{,}1)=0$.

312. Розв'яжи рівняння:

а) $3x+6=2(2x-7)-x$;

б) $1{,}8(1-2x)=-2(1{,}8x+3)+7{,}8$;

в) $5x+8=3(2x-4)-x$;

г) $6{,}2(3-2x)=20-(12{,}4x+1{,}4)$;

ґ) $7x+3=3(2x-1)+x$;

д) $4(y-0{,}2)+1{,}9=5y-6(0{,}3+y)+7$.

313. Розв'яжи рівняння:

а) $(x-3)(x+2)=0$;

б) $(x+4)(x-7)\cdot x=0$;

в) $(2-x)(2+x)(x-2{,}5)=0$;

г) $|x|=5$;

ґ) $|x|=-6$;

д) $|x|=0$.

314. Розв'яжи рівняння:

а) $3(x-7)-(9-2x)=2(12-x)-(x-10)$;

б) $4(2-3x)-2(9x-8)=15(1-x)+2(4-x)$;

в) $7(3-x)-3(x-4)=5(3+2x)-2(-3-2x)$;

г) $4(x-16)-(8-x)=10(x+1)-2(15+8x)$.

www.e-ranok.com.ua

315. Знайди корені рівняння:

а) $\frac{1}{3}(4{,}5 + 2x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}(0{,}5 - x)$;

б) $\frac{2}{5}(x - 1{,}5) = \frac{4}{15}\left(1\frac{1}{2}x - 3\right) + 1{,}2$;

в) $\frac{4}{15}\left(1\frac{1}{2}x - 3\right) = \frac{2}{3}(x - 1{,}5) - 1{,}2$;

г) $\frac{1}{3}\left(1 + 2\frac{1}{3}x\right) = -\frac{2}{9}(x - 1{,}5) + x$.

316. Розв'яжи рівняння:

а) $\frac{1}{5}(3x - 7) - \frac{2}{3}(4x - 3) = 4\frac{11}{15}$;

б) $\frac{1}{4}(5 - 3x) + \frac{1}{5}(2x + 7) = 4\frac{3}{4}$;

в) $\frac{3}{8}(4 - 3x) + \frac{2}{7}(6x - 5) = -2\frac{2}{7}$;

г) $\frac{4}{7}(2x - 5) + \frac{3}{5}(4x + 1) = -\frac{17}{35}$;

г) $\frac{2}{3}(5x - 2) - \frac{3}{4}(3x + 1) = 3 - \frac{1}{2}(2x + 1)$;

д) $\frac{2}{7}(3x - 4) - \frac{3}{5}(2x + 2) = \frac{3}{7}x - \frac{1}{5}(5x - 2)$.

317. Знайди корені рівняння:

а) $3(2x - 3) + 4|x| = 1$;

б) $3|x| + 4(2x - 7) = 5$;

в) $4(2x - 7) - 6|x| = 2(2 - x)$;

г) $3|x| - 4(3x - 7) = 3(1 - 2x) - 4$;

ґ) $|x + 3| = -4$;

д) $|3x + 1| - 3 = 0$.

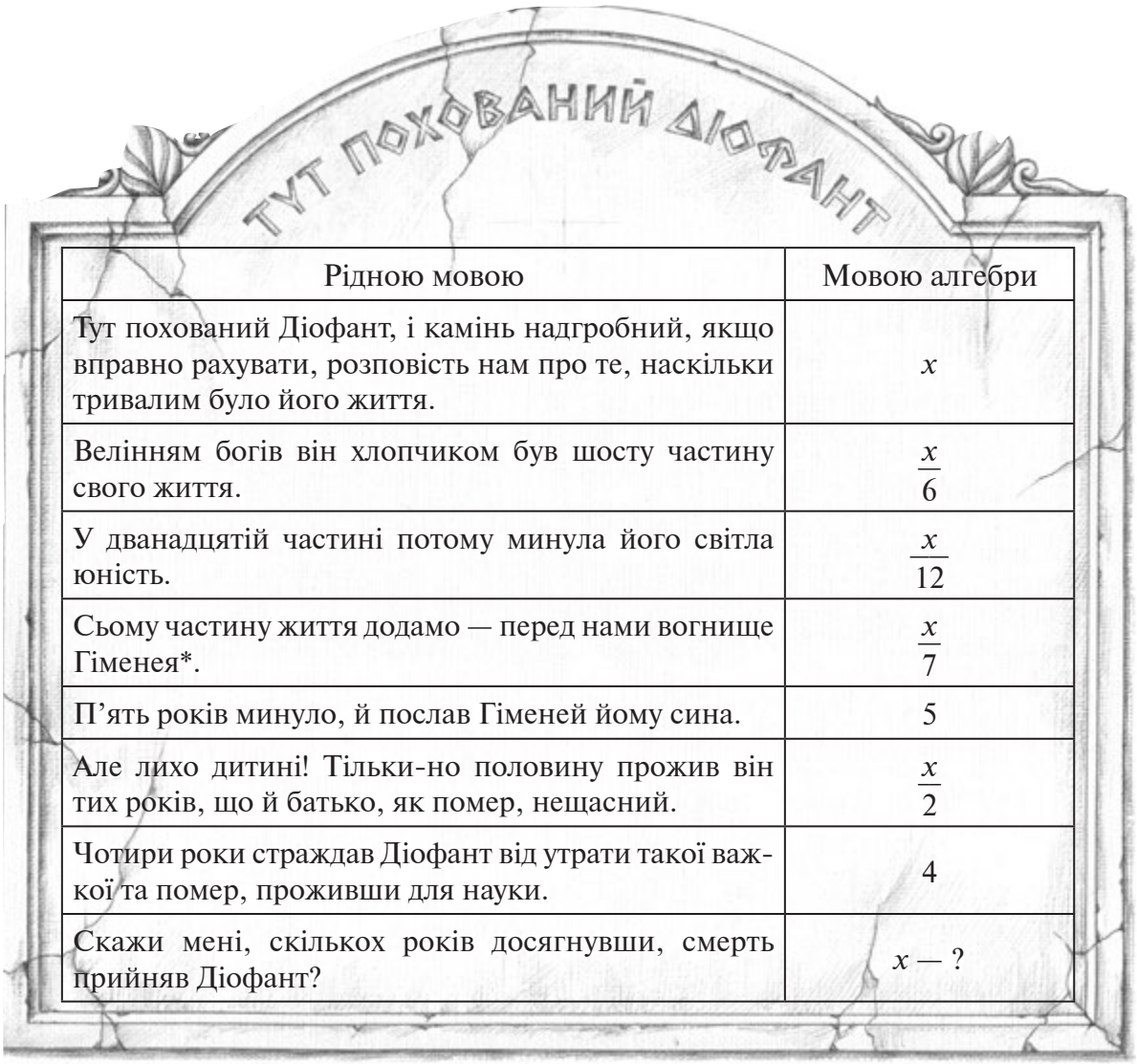
www.e-ranok.com.ua

4.3. Розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь

Багато задач можна розв'язати, склавши за їх умовою рівняння. Ти почав знайомство із цим методом розв'язування задач іще в 6 класі.

Рівняння — це мова алгебри. Видатний учений Ісаак Ньютон у своєму підручнику з алгебри писав: *«Щоб вирішити питання щодо числа або абстрактного відношення величин, потрібно лише перекласти задачу з рідної мови мовою алгебраїчною»*.

Але мова алгебри не є багатослівною, тому такий переклад може становити труднощі. Розглянемо як приклад одну стародавню математичну задачу про життя Діофанта.



Рідною мовою	Мовою алгебри
Тут похований Діофант, і камінь надгробний, якщо вправно рахувати, розповість нам про те, наскільки тривалим було його життя.	x
Велінням богів він хлопчиком був шосту частину свого життя.	$\frac{x}{6}$
У дванадцятій частині потому минула його світла юність.	$\frac{x}{12}$
Сьому частину життя додамо — перед нами вогнище Гіменея*.	$\frac{x}{7}$
П'ять років минуло, й послав Гіменей йому сина.	5
Але лихо дитині! Тільки-но половину прожив він тих років, що й батько, як помер, нещасний.	$\frac{x}{2}$
Чотири роки страждав Діофант від утрати такої важкої та помер, проживши для науки.	4
Скажи мені, скількох років досягнувши, смерть прийняв Діофант?	x — ?

**Гіменей — бог шлюбу в Давній Греції.*

www.e-ranok.com.ua

Історія зберегла мало відомостей про ***Діофанта Олександрійського*** *— давньогрецького математика, який жив на межі II–III ст. н. е. Найвидатніший його твір — «Арифметика» у 13 книгах, з яких до наших часів дійшли тільки перші 6. Усе, що відомо про Діофанта, узято з його надгробного напису, складеного у вигляді задачі.*

Складемо рівняння.

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4.$$

Розв'язуючи рівняння, отримаємо:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} + 9 \Big| \cdot 84;$$

$84x = 14x + 7x + 12x + 42x + 756;$
$84x - 14x - 7x - 12x - 42x = 756;$
$9x = 756;$
$x = 756 : 9;$
$x = 84.$

84 (роки) — прожив Діофант.

Можна також дізнатися, що він одружився у 33 роки, став батьком у 38, втратив сина на 80-му році життя.

Розв'язуючи задачу, важливо правильно відобразити її зміст за допомогою рівняння, а також описати свої міркування.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. У першій бригаді будівельників було в 4 рази більше, ніж у другій. Після того як із першої бригади пішло 10 працівників, а в другу прийшло 8, у першій бригаді стало в 2 рази більше будівельників, ніж у другій. Скільки будівельників було в кожній бригаді спочатку?

Розв'язання.

Нехай у другій бригаді було x будівельників, тоді в першій було $4x$ будівельників. Після того як із першої бригади пішло 10 працівників, у ній залишилося $(4x - 10)$ будівельників. Після приходу в другу бригаду 8 осіб у ній стало $(x + 8)$ будівельників, що за умовою задачі в 2 рази менше, ніж у першій. Складемо й розв'яжемо рівняння:

$4x - 10 = 2(x + 8);$
$4x - 10 = 2x + 16;$
$4x - 2x = 16 + 10;$
$2x = 26;$
$x = 26 : 2;$
$x = 13.$

www.e-ranok.com.ua

13 (будівельників) — було в другій бригаді;
$4 \cdot 13 = 52$ (будівельники) — було в першій бригаді.
Відповідь: 52 будівельники; 13 будівельників.

Приклад 2. За 2 год Олег подолав 11 км. Частину шляху він ішов зі швидкістю 4 км/год, а частину — біг зі швидкістю 10 км/год. Скільки часу Олег ішов, а скільки біг?

Розв'язання.
Нехай Олег ішов протягом x год, тоді на біг він витратив $(2 - x)$ год. Шлях, який хлопчик пройшов кроком, становить $4x$ (км), а шлях, який пробіг,— $10(2 - x)$ км. За 2 год Олег подолав відстань $4x + 10(2 - x)$ км, що за умовою задачі дорівнює 11 км.
Підсумки міркувань можна занести до таблиці:

	Час (год)	Швидкість (км/год)	Шлях (км)
Ходіння	x	4	$4x$
Біг	$2 - x$	10	$10(2 - x)$

Складемо й розв'яжемо рівняння:
$4x + 10(2 - x) = 11;$
$4x + 20 - 10x = 11;$
$4x - 10x = 11 - 20;$
$-6x = -9;$
$x = -9 : (-6);$
$x = 1{,}5.$
1,5 (год) — витрачено на ходіння;
$2 - 1{,}5 = 0{,}5$ (год) — витрачено на біг.
Відповідь: 1,5 год; 0,5 год.

Приклад 3. Одну сторону рівностороннього трикутника збільшили на 30 %, а іншу зменшили на 20 %. У результаті отримали трикутник із периметром 124 см. Знайди довжину сторони рівностороннього трикутника.

Розв'язання.
Нехай довжина сторони рівностороннього трикутника x см. Першу сторону збільшили на 30 %, тобто її довжина стала $x + 0{,}3x = 1{,}3x$ (см). Другу сторону зменшили на 20 %, тобто її довжина стала $x - 0{,}2x = 0{,}8x$ (см). Периметр отриманого трикутника становить $(1{,}3x + 0{,}8x + x)$ см, що за умовою задачі дорівнює 124 см.

www.e-ranok.com.ua

Розв'яжемо рівняння:
$1{,}3x + 0{,}8x + x = 124$;
$3{,}1x = 124$;
$x = 124 : 3{,}1$;
$x = 40$.
40 (см) — довжина сторони рівностороннього трикутника.
Відповідь: 40 см.

Дивись відеоматеріали

318. За умовою задачі склади рівняння й розв'яжи його.

а) Сума числа x і числа, яке на 5 одиниць менше за нього, дорівнює 19.

б) Від числа відняли 3, результат помножили на 4 й отримали 16.

в) Різниця потроєного числа та числа, яке на 7 одиниць більше за початкове, дорівнює 9.

г) Число помножили на 6, відняли від добутку 13 й отримали 17.

ґ) Число поділили на 3, додали 16 й отримали 25.

319. Знайди два числа, якщо відомо, що:

а) їхня сума дорівнює 45, а різниця становить 9;

б) їхня сума дорівнює 111, а різниця становить 13;

в) їхня сума дорівнює 23, а сума подвоєного першого числа та потроєного другого становить 61;

г) їхня різниця дорівнює 2, а сума першого числа, збільшеного в 4 рази, і половини другого числа становить 44;

ґ) сума цих чисел дорівнює 42, і одне число в 5 разів більше за друге.

320. Периметр трикутника дорівнює 70 см. Його друга сторона в 2 рази довша за першу, а третя на 10 см коротша за другу. Знайди сторони трикутника.

321. Периметр прямокутника дорівнює 150 см. Довжина прямокутника на 9 см більша за ширину. Знайди сторони та площу прямокутника.

www.e-ranok.com.ua

322. За дві книжки й чотири зошити мама заплатила 39 грн 40 к. Скільки коштували одна книжка й один зошит, якщо вартість книжки на 8 грн 90 к. більша за вартість зошита?

323. Денисова дача розташована за 55 км від міста, і він діставався туди 1 год. Спочатку хлопець їхав автобусом зі швидкістю 40 км/год, а потім — електричкою зі швидкістю 60 км/год. Скільки кілометрів проїхав Денис автобусом і скільки — електричкою?

324. Автомобіль проїхав 135 км зі Львова до Івано-Франківська. Першу частину шляху він їхав зі швидкістю 60 км/год, а другу — зі швидкістю 80 км/год. Скільки часу тривала поїздка, якщо на першу частину шляху автомобіль витратив на 0,5 год більше, ніж на другу?

325. На одній автостоянці було в 4 рази менше машин, ніж на другій. Коли з другої стоянки на першу переїхало 12 автомобілей, машин на стоянках стало порівну. Скільки машин було на кожній стоянці спочатку?

326. Одна свердловина на 3,4 м глибша за другу. Якщо глибину першої свердловини збільшити на 21,6 м, а другої — у 3 рази, то обидві свердловини матимуть однакову глибину. Знайди глибину кожної свердловини.

327. Сергій прочитав книжку, в якій було 310 сторінок. На п'ятий день він став читати на 5 сторінок за день більше, ніж у перші чотири дні. Наприкінці шостого дня хлопець дочитав книжку. Скільки сторінок на день читав Сергій спочатку?

328. Одну сторону квадрата збільшили на 20 %, а другу — на 60 %. У результаті отримали прямокутник із периметром 84 см. Знайди сторону квадрата.

www.e-ranok.com.ua

329. Сума чотирьох послідовних парних чисел дорівнює 140. Знайди ці числа.

330. Сума п'яти послідовних непарних чисел дорівнює 215. Знайди ці числа.

331. Два автомобілі одночасно виїхали назустріч один одному із Сімферополя та Запоріжжя і зустрілися через 2,5 год. Відстань між містами 375 км. Знайди швидкості автомобілів, якщо один із них їхав на 10 км/год швидше, ніж другий.

332. Мама зняла з полиці чверть книжок, що там стояли, і ще 10 книжок, після чого на полиці залишилося $\frac{2}{3}$ від початкової кількості книжок. Скільки книжок було на полиці?

333. Петрик і Миколка мешкають на однаковій відстані від школи. Петрик іде до школи зі швидкістю 3 км/год, а Миколка — зі швидкістю 4 км/год. Якою є відстань до школи та скільки часу витрачає на дорогу кожний хлопчик, якщо Миколка добирається до школи на 5 хв швидше, ніж Петрик?

334. З пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 216 м, одночасно назустріч один одному з однаковою швидкістю вийшли два моторні човни. Вони зустрілися на відстані 84 м від пункту A, розташованого нижче за течією. Знайди швидкість човнів у стоячій воді, якщо швидкість течії становить 3 м/с.

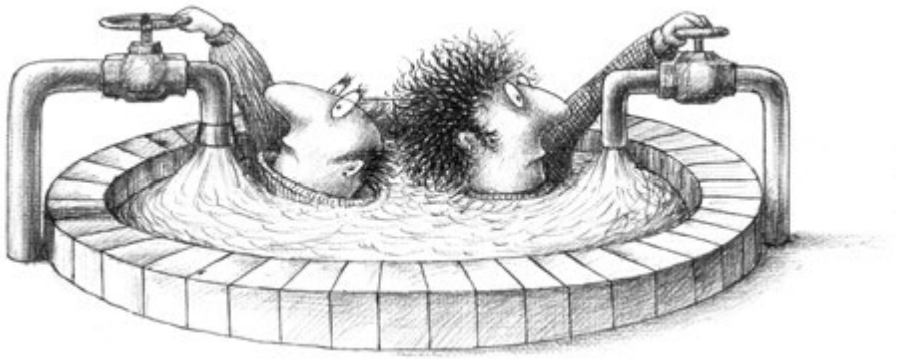
335. Марійка, Юля, Оленка й Тетянка варили варення з абрикосів. Оленка отримала варення на 0,2 кг більше, ніж Тетянка. Юля та Марійка отримали варення порівну, причому кожна — у 2 рази більше, ніж Оленка, та на 1,8 кг більше, ніж Тетянка. Скільки варення зварила кожна дівчинка?

www.e-ranok.com.ua

336. Бак об'ємом 240 л заповнено водою. Для злиття води відкрили кран, через який вода витікала зі швидкістю 600 л на годину. Трохи згодом відкрили другий кран, через який вода витікала зі швидкістю 300 л на годину. Протягом якого часу було відкрито обидва крани, за умови, що він становить 40 % від часу, протягом якого було відкрито тільки один кран?

337. Братові та двом сестрам разом 33 роки. Вік меншої сестри становить 80 % віку брата, а старша сестра на 50 % старша за брата. Знайди вік брата й сестер.

338. Об'єм шкільного басейну — 200 м^3. Протягом 3 год він наповнювався водою з одного крана. Потім відкрили другий кран, і через 4 год басейн був повний. Скільки води витікає за годину з кожного крана, якщо пропускна спроможність другого крана становить 75 % пропускної спроможності першого?



Стародавні єгиптяни записували математичні відомості, потрібні їм для обробки землі, астрономічних обчислень та будівельних робіт, на папірусах — стрічках, що були виготовлені з особливого матеріалу рослинного походження та зберігалися у вигляді сувоїв.

У Британському музеї зберігається так званий папірус Райнда, розшифрований 1877 р. Рукопис належить до періоду 2000–1700 рр. до н. е. Він містить 84 задачі.

www.e-ranok.com.ua

339. Задача з папірусу Райнда.

Знайди число, якщо відомо, що від додавання до нього $\frac{2}{3}$ його та віднімання від отриманої суми її третини отримаєш число 10.

340. Корабель вийшов із порту Ізмаїл і пішов по Дунаю проти течії. Швидкість корабля в стоячій воді дорівнює 7,5 м/с. Через 45 с з корабля за борт упала дошка, яка попливла вниз за течією і через 3 хв досягла порту. Знайди швидкість течії річки.

341. Птах і літак летять у протилежних напрямках, причому літак — проти вітру, а птах – за вітром. За 2 хв птах долає таку саму відстань, як літак за 20 с. Знайди швидкість вітру, якщо швидкість літака дорівнює 460 км/год, а швидкість птаха 30 км/год.

Ще з давніх-давен в Індії було накопичено великі знання з граматики, астрономії та інших наук. Найбільших успіхів індійські вчені досягли в математиці. Індійські математики далекого минулого полюбляли змагатися на публічних народних зборах, розв'язуючи математичні задачі.

Індійський математик Срідхара, що жив приблизно у VI–X ст. н. е., є автором низки задач, що їх широко використовували вчені пізніших часів.

342. Стародавня індійська задача Срідхари.

П'ята частина бджолиного рою сидить на квітці кадамба, одна третина — на квітках сіліндха. Потроєна різниця двох останніх чисел — це бджоли, які вирушили до квітів кутая. І залишилася ще одна бджілка, що літає вперед і назад, приваблена ароматом жасмину й пандусу. Скільки всього бджіл?

www.e-ranok.com.ua

4.4. Лінійні рівняння, що містять параметри

Лінійні рівняння з одним невідомим можуть містити й інші букви, які при розв'язуванні рівняння вважаються постійними. Ці букви називають **параметрами**, а рівняння з ними — **рівняннями з параметрами**. Рівняння, що містять параметри, розв'язуються так само, як і звичайні лінійні рівняння, але їхні корені залежать від значень параметрів і виражаються через параметри.

Розв'язуючи рівняння, що містять параметри, ми відповідаємо на запитання: за яких значень параметра рівняння має єдиний розв'язок, у яких випадках — безліч, а в яких випадках розв'язків немає взагалі.

Приклад 1. Розв'яжемо рівняння $5x - 3a = ax + 7$ відносно змінної x, де x — невідома величина, a — параметр.

Розв'язання.

Перенесемо члени рівняння, що містять x, у ліву частину, а всі інші — у праву частину рівняння:

$5x - ax = 7 + 3a$.

Винесемо x у лівій частині рівняння за дужки:

$x(5 - a) = 7 + 3a$.

Якщо $a = 5$, отримуємо $0 \cdot x = 22$, отже, це рівняння коренів не має.

Коли ж $a \neq 5$, розділимо обидві частини рівняння на $5 - a$:

$x = \dfrac{7 + 3a}{5 - a}$ — рівняння має єдиний корінь.

Відповідь: якщо $a \neq 5$, $x = \dfrac{7 + 3a}{5 - a}$;

якщо $a = 5$, коренів немає.

Таким чином, ми дослідили залежність розв'язку рівняння від параметра.

Приклад 2. Розв'яжемо рівняння $4 - 3x + 2a = 6 - bx$ відносно змінної x.

Розв'язання.

$bx - 3x = 6 - 4 - 2a$;

$x(b - 3) = 2 - 2a$.

www.e-ranok.com.ua

Якщо $b = 3$ та $2 - 2a \neq 0$ ($a \neq 1$), то отримуємо рівність, яка не виконується при жодному значенні змінної.
Отже, в цьому випадку коренів немає.
Якщо $b = 3$ та $a = 1$, то отримуємо $0 \cdot x = 0$. Рівняння має безліч розв'язків.

Якщо $b \neq 3$, то $x = \dfrac{2 - 2a}{b - 3}$ — це єдиний корінь рівняння.

Відповідь:
якщо $b \neq 3$, то $x = \dfrac{2 - 2a}{b - 3}$;
якщо $b = 3$, $a = 1$ — безліч коренів;
якщо $b = 3$, $a \neq 1$ — коренів немає.

343. Розв'яжи рівняння відносно змінної x і досліди розв'язки:

а) $3x - 4a = 5$;
б) $4x - 5 = bx + 7$;
в) $3(2 - bx) = b(5 + x)$;
г) $7(2x - p) = 2px - 13 + 8x$;
ґ) $4x - 3a = 4 - 5bx$;
д) $2p - 3q + 5x = 2px - q + 2$;
е) $a(3 - 5x) = 2(b + x)$;
є) $4(5m - 3) - n(2 - 7x) = 3x$;
ж) $a(3 + 2x) - 4(b - 3x) = 9$.

344. Автомобіль подолав 120 км за t год. Половину цього часу він їхав зі швидкістю v км/год, третину часу — зі швидкістю $(v + 10)$ км/год, а решту часу — зі швидкістю 60 км/год. Склади рівняння й розв'яжи його відносно швидкості v.

www.e-ranok.com.ua

Завдання для тематичного самоконтролю

1. Розв'яжи рівняння:

а) $\frac{2}{5}x = 16$;

б) $4x - 2{,}8 = 0$;

в) $7x + 0{,}4 = 2x - 2{,}6$;

г) $26 - 3(x + 2) = 5(3 - x)$.

2. Петрик задумав число. Якщо його помножити на 5, а потім добуток зменшити на 18, отримаємо половину задуманого числа. Яке число задумав Петрик?

3. Розв'яжи рівняння:

а) $(x - \frac{1}{3}) \cdot x \cdot (4 - x) = 0$;

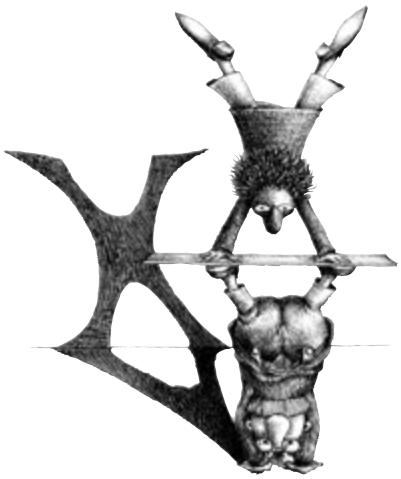
б) $\frac{x+3}{4} - \frac{x-1}{5} = 3$.

4. Пароплав проходить від однієї пристані до іншої за течією за 4 год, а в протилежному напрямку — за 5 год. Знайди відстань між пристанями, якщо швидкість течії 2 км/год.

5. Розв'яжи рівняння:

$4(2x - 3) - 5 = 2(4 - |x|)$.

Пройди онлайн-тестування



www.e-ranok.com.ua

Завдання підвищеної складності

1. Прилад показав, що машина пройшла 15 951 км. Через 2 год на табло цього приладу водій побачив число, яке теж однаково читається справа наліво та зліва направо. Визнач швидкість машини.

2. Напиши замість зірочок зменшуване і від'ємник, використовуючи цифри 1, 9, 8 і 7.

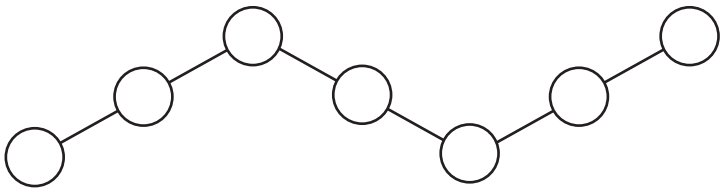
$$\begin{array}{r} * \; * \; * \; * \\ - \; * \; * \; * \; * \\ \hline 1 \; 9 \; 8 \; 7 \end{array}$$

3. Поштовий літак долає відстань між двома містами за 2 год. За скільки годин пасажирський літак подолає в чотири рази меншу відстань, якщо його швидкість у два рази більша за швидкість поштового?

4. Уздовж бігової доріжки на однаковій відстані один від одного стоять 15 прапорців. Бігун пробіг відстань від першого до дев'ятого прапорця за 9 с. За скільки секунд він подолає всю дистанцію?

5. Черепаха виповзає з ями завглибшки 15 см. Удень вона піднімається на 3 см, а вночі опускається на 1 см. Через скільки днів черепаха виповзе з ями?

6. Впиши у кружечки натуральні числа від 2 до 8 так, щоб їхня сума на кожній лінії дорівнювала 14.



7. Велосипедист проїхав $\frac{5}{7}$ усього шляху і ще 40 км, після чого йому залишилося проїхати на 118 км менше, ніж $\frac{3}{4}$ усього шляху. Яка довжина шляху?

www.e-ranok.com.ua

8. Через різницю нічної та денної температур за день годинник поспішає на $\frac{1}{2}$ хв, а за ніч відстає на $\frac{1}{3}$ хв. Уранці 1 травня на годиннику встановили точний час. Коли годинник поспішатиме на 5 хв?

9. Чи ділиться число 23 456 789 101 112 на 12?

10. Обчисли: $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)$.

11. Із семи сірників складено дріб $\frac{\text{I}}{\text{VII}}$.

Переставши сірники так, щоб отримати дріб $\frac{1}{3}$.

12. Три чоловіки мають імена Антон, Олег та Юрій і прізвища Коваленко, Лискін та Горін. Один із них електрик, другий — садівник, третій — учитель. Відомо, що:

а) Коваленко товаришує з Антоном;

б) електрик і Антон допомагають Горіну будувати дім;

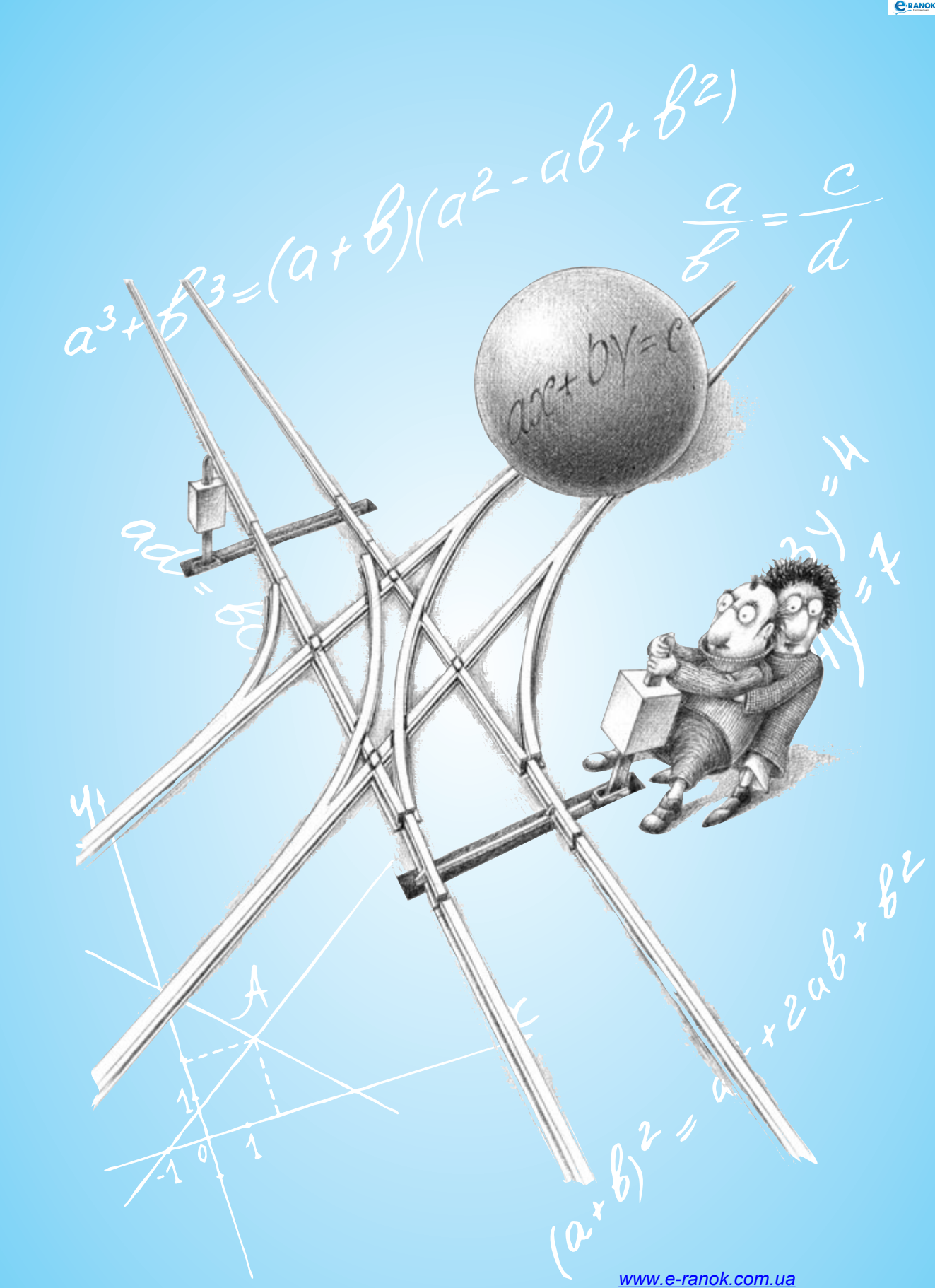
в) учителю, Юрію та Лискіну подобається грати в шахи;

г) у садівника Лискіна та Олега спільна огорожа.

Назви ім'я, прізвище та професію кожного чоловіка. Яка з чотирьох умов є надлишковою?

13. Петро і Дмитро йдуть по периметру міської площі й рахують будинки. Вони йдуть в одному напрямку, але почали рухатися з різних точок. П'ятий для Петра будинок є дванадцятим для Дмитра, а п'ятий для Дмитра будинок є тринадцятим для Петра. Скільки будинків на площі?

www.e-ranok.com.ua



www.e-ranok.com.ua

ГЛАВА 5. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

5.1. Лінійні рівняння з двома змінними

Припустимо, нам відомо, що одне з двох даних чисел на 3 більше за інше. Якщо перше число позначити буквою x, то друге буде $(3 + x)$. Можна зробити інакше. Позначимо перше число буквою x, а друге — буквою y, тоді $y - x = 3$. Ця рівність, що містить дві змінні, виражає співвідношення між даними числами. Такі рівності називають **рівняннями з двома змінними**, або **з двома невідомими**.

Наприклад, вирази $4x + 3y = 15$; $-2x + y = 7$; $x^2 + y^2 = 20$; $xy = 6$ — це рівняння з двома змінними.

Рівняння виду $ax + by + c = 0$, де x та y — змінні, a, b та c — деякі числа, називається лінійним рівнянням з двома змінними.

У наведеному вище прикладі перше та друге рівняння можна записати у вигляді $4x+3y-15=0$; $-2x+y-7=0$, тобто $ax+by+c=0$. Отже, ці рівняння є лінійними.

Повернемося до складеного нами рівняння $y - x = 3$. Якщо $x = 4$, а $y = 7$, то воно перетворюється на правильну числову рівність $7 - 4 = 3$. Пара значень змінних $x = 4$, $y = 7$ є розв'язком цього рівняння.

Пара значень змінних, яка перетворює лінійне рівняння на правильну числову рівність, називається розв'язком лінійного рівняння з двома змінними.

Розв'язками лінійного рівняння $y - x = 3$ є також пари чисел $x = 10$ та $y = 13$; $x = -6$ та $y = -3$; $x = 121$ та $y = 124$ тощо.

Розв'язки лінійних рівнянь із двома змінними прийнято записувати коротше: (10; 13), (−6; −3), (121; 124). Зверни увагу, що за такої форми запису дуже важливим є порядок чисел. На першому місці стоїть значення змінної x, а на другому — значення змінної y.

www.e-ranok.com.ua

Так само, як і у випадку рівнянь з однією змінною, **основні властивості рівнянь** є чинними і для рівнянь із двома змінними.

Якщо:
- **у рівнянні розкрити дужки і звести подібні доданки;**
- **до обох частин рівняння додати (або відняти від них) той самий вираз;**
- **члени рівняння перенести з однієї частини в іншу, змінивши при цьому їхні знаки на протилежні;**
- **обидві частини рівняння помножити (розділити) на той самий відмінний від нуля вираз,**

то отримаємо рівняння, яке має такі самі розв'язки, що й дане.

Розглянемо лінійне рівняння $3x + 4y - 16 = 0$.

Виразимо одну змінну цього рівняння через іншу, наприклад y через x.

Перенесемо доданки $3x$ і 16 у праву частину:

$4y = 16 - 3x$.

Тепер розділимо обидві частини цього рівняння на 4:

$y = 4 - \frac{3}{4}x$.

Надаючи змінній x різних значень, ми зможемо знайти відповідні значення y.

Наприклад: якщо $x = 4$, то $y = 1$; якщо $x = 8$, то $y = -2$; якщо $x = -4$, то $y = 7$ тощо.

Пари чисел (4; 1); (8; −2); (−4; 7) — розв'язки рівняння $3x + 4y = 16$. Це рівняння має безліч розв'язків.

Запитання для самоконтролю

1. Наведи приклад рівняння з двома змінними.
2. Що називається лінійним рівнянням з двома змінними?
3. Що називається розв'язком лінійного рівняння з двома змінними?
4. Які властивості мають рівняння з двома змінними?

5*. Скільки розв'язків має лінійне рівняння з двома змінними? Поясни на прикладі.

Дивись відеоматеріали

www.e-ranok.com.ua

345. Які з поданих рівнянь є рівняннями з двома змінними?

а) $x^2 - y = 4$;
б) $x + y + z = 1$;
в) $2(x - y)^2 = 5$;
г) $a^2 + b^2 = c^2$;
ґ) $2z - 4y = -15$;
д) $3(x - 2) - 2(z + 3) = 6$.

346. Чи є подане рівняння з двома змінними лінійним?

а) $3x - 2y = 15$;
б) $x^2 + 3y = 5$;
в) $11t + 6z = 0$;
г) $-2x + xy = 8$.

347. Які з пар (3; 1), (0; 10), (2; 4) та (3; 2,5) є розв'язками лінійного рівняння $3x + y = 10$?

348. Які з пар $(-5; 0)$, $(-4; 3)$, $(-3; 4)$, $(-1; -3)$, $(0; -5)$, $(4; -3)$, $(5; 0)$ є розв'язками лінійного рівняння $2x + y = -5$, а які — розв'язками лінійного рівняння $x + 3y = -5$?

349. Вирази змінну y через змінну x:

а) $y + 2x = 3$;
б) $4x - y = 8{,}5$;
в) $3x - 4 = y + 5$;
г) $7 - 8y = x + 6$.

350. Зведи рівняння до вигляду $ax + by = c$:

а) $3{,}5y + 4{,}2 = 2x - 6$;
б) $7 - 2y + 3x = 4y - 2x + 4$;
в) $3(2x - 7) = 2{,}5(6 - 2y)$;
г) $-3{,}4(2x - 4y) = -5(x + 1)$.

351. Склади лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого буде пара чисел $(-1; 2)$.

352. З лінійного рівняння $4x - 3y = 12$ вирази y через x, а потім x через y.

www.e-ranok.com.ua

353. Вирази з поданого рівняння змінну y через змінну x, а потім, скориставшись отриманою формулою, знайди чотири будь-які розв'язки цього рівняння:

а) $x + y = 6$;
б) $2x - y = 4{,}5$;
в) $3x + 2y = 12$;
г) $5y - 2x = 1$.

354. Серед розв'язків лінійного рівняння $x + 2y = 18$ знайди таку пару, яка складається з двох однакових чисел.

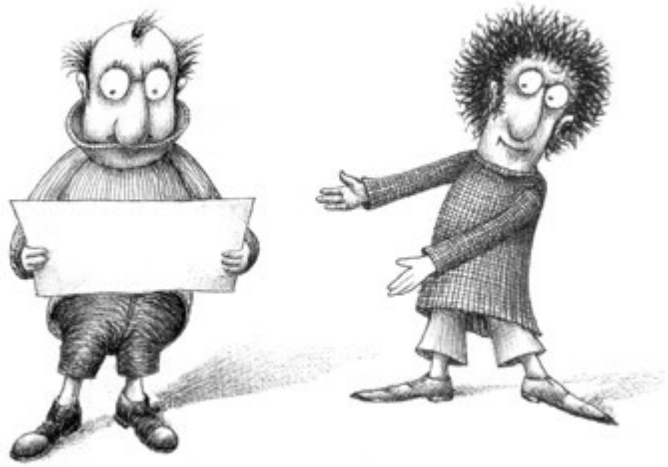
355. Відомо, що пара $(x; 5)$ є розв'язком лінійного рівняння $2x - 5y = 13$. Знайди значення x.

356. За якого значення a пара чисел $(2; 1)$ є одним із розв'язків лінійного рівняння $ax + 2y = 8$?

357. За якого значення a пара чисел $(1; -3)$ є одним із розв'язків лінійного рівняння $6x - ay = 4$?

358. Чи має розв'язки рівняння з двома змінними? Якщо так, то запиши ці розв'язки.

а) $x^2 + y^2 = -1$;
б) $x^2 + y^2 = 0$;
в) $x^6 + x^{10} = -5$;
г) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 0$.



www.e-ranok.com.ua

5.2. Графік лінійного рівняння з двома змінними

Кожна пара чисел, що є розв'язком рівняння зі змінними x і y, зображується на координатній площині точкою, координатами якої є ця пара чисел (абсцисою є значення x, ординатою — значення y). Сукупність таких точок утворює **графік рівняння з двома змінними**.

Графіком рівняння з двома змінними називається множина всіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками цього рівняння.

Приклад 1. Розглянемо лінійне рівняння $3x - 4y = 12$.

Виразимо y через x:

$4y = 3x - 12;$

$y = \frac{3}{4}x - 3.$

Ми отримали лінійну функцію, графіком якої є пряма.

Побудуємо її.

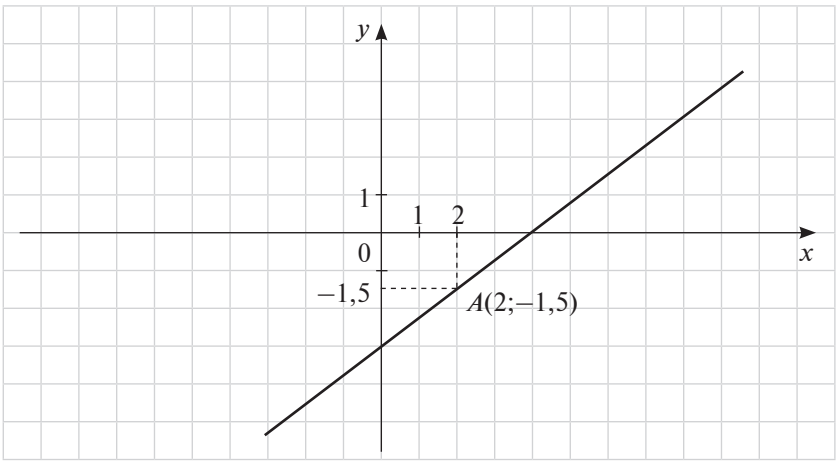
x	0	4
y	-3	0

Ця пряма є графіком даного рівняння (див. рисунок). Кожна точка графіка має координати, що задовольняють дане рівняння.

Наприклад, візьмемо на графіку точку $A(2; -1{,}5)$. Підставимо її координати в рівняння:

$3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1{,}5) = 6 + 6 = 12.$

Рівність правильна.



www.e-ranok.com.ua

Графіком лінійного рівняння з двома змінними є пряма.

Для побудови графіка лінійного рівняння з двома змінними потрібно виразити y через x, далі взяти будь-які два значення x і знайти відповідні їм значення y, а потім позначити дві точки на координатній площині та провести через них пряму.

Ми розглядали випадок, коли в рівнянні $ax + by + c = 0$ $a \neq 0$ та $b \neq 0$.

Нехай тепер $a = 0$ та $b = 0$, тоді рівняння $ax + by + c = 0$ набуває вигляду $0x + 0y + c = 0$.

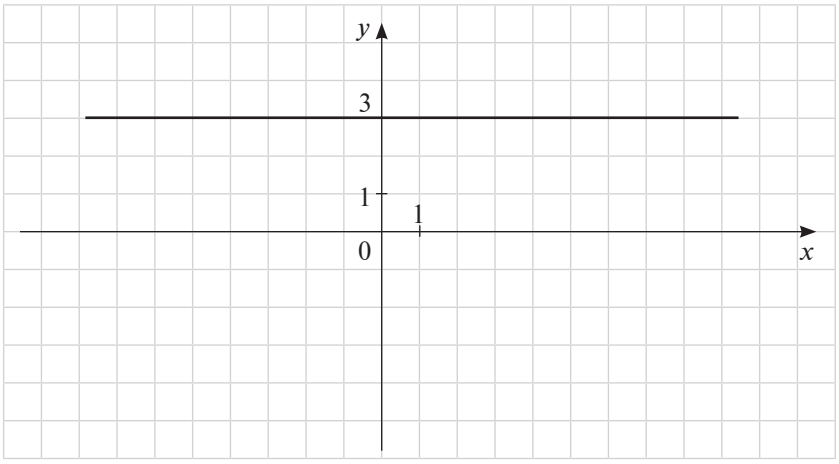
Якщо $c \neq 0$, то ця рівність не виконуватиметься за жодного значення x та y, тобто в цьому випадку рівняння розв'язків не має.

Коли ж $c = 0$, то будь-яка точка координатної площини задовольняє це рівняння. Отже, графіком цього рівняння є вся координатна площина, а розв'язком — будь-яка пара чисел.

Приклад 2. Побудуємо графік лінійного рівняння $0x + y = 3$.

Розв'язання.

За будь-якого значення x $y = 3$, тобто розв'язком рівняння є пара $(x; 3)$, де x — будь-яке число, наприклад, $(0; 3)$, $(2; 3)$. Проведемо через ці точки пряму (див. рисунок). Графіком рівняння є пряма, паралельна осі OX, яка проходить через точку $(0; 3)$. Початкове рівняння інакше можна було б записати як $y = 3$.

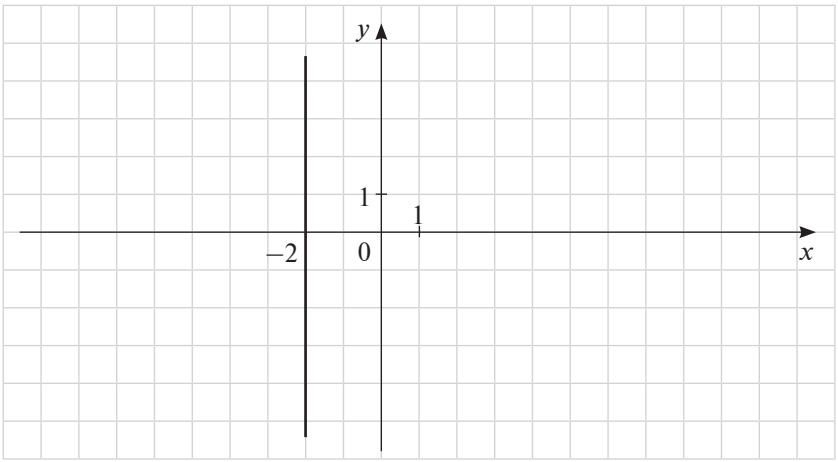


Ми розглянули випадок, коли в лінійному рівнянні $ax + by + c = 0$ $a = 0$, а $b \neq 0$.

www.e-ranok.com.ua

Приклад 3. Побудуємо графік лінійного рівняння $x + 0y = -2$ (або, інакше, $x = -2$).

Розв'язання.
Розв'язками є пари чисел виду $(-2; y)$, де y — будь-яке число. Наприклад, $(-2; 0)$, $(-2; 2)$. Проведемо пряму через ці точки (див. рисунок).



Графіком цього рівняння є пряма, що паралельна осі OY і проходить через точку $(-2; 0)$.

Таким чином, ми розглянули випадок, коли в рівнянні $ax + by + c = 0$ $a \neq 0$, а $b = 0$.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається графіком рівняння з двома змінними?
2. Яка геометрична фігура є графіком лінійного рівняння з двома змінними? Як побудувати цей графік?
3. Що являє собою графік рівняння $ax + by + c = 0$, якщо в ньому один або обидва коефіцієнти дорівнюють нулю?

4*. Що є графіком рівнянь $x = 0$ та $y = 0$?

Дивись відеоматеріали

www.e-ranok.com.ua

359. Які з точок $A(6; 1)$, $B(-6; -5)$, $C(0; -2)$, $D(-1; 3)$ належать графіку рівняння $x - 2y = 4$?

360. Побудуй графік рівняння:

а) $2x - y = 6$;
б) $x + 6y = 0$;
в) $x + y = 5$;
г) $y - 4x = 0$;
ґ) $x - 3y = -2$;
д) $2x - y = 5$.

361. На прямій, що є графіком лінійного рівняння $21x - 5y = 100$, узято точку, абсциса якої дорівнює 3. Знайди ординату цієї точки.

362. Чи належать графіку лінійного рівняння $4x - 5y = 30$ точки $A(1; -4)$, $B(0; -6)$, $C(5; -2)$?

363. За якого значення a графік лінійного рівняння проходить через початок координат?

а) $5x - 2y = a$;
б) $6x + 7y = a + 4$.

364. Побудуй графік лінійного рівняння:

а) $1{,}5x + 2y = 3$;
б) $3x + 2y = 6$;
в) $5x + 3y = 12$;
г) $-3x - 2y = 8$.

365. Побудуй графік лінійного рівняння:

а) $1{,}5y = 6$;
б) $1{,}6x = 4{,}8$;
в) $0{,}5y = 1{,}5$;
г) $-0{,}2x = 1{,}4$.

www.e-ranok.com.ua

366. Побудуй графік лінійного рівняння:

а) $x - y - 1 = 0$;
б) $3x = y + 4$;
в) $2(x - y) + 3y = 4$;
г) $(x + y) - (x - y) = 4$.

367. Побудуй пряму, яка є графіком лінійного рівняння $y - 2{,}5x = c$, якщо відомо, що вона проходить через точку $K(2; -3)$.

368. Не виконуючи побудови, знайди координати точок перетину графіка рівняння $(x + 2)(y + 3) = 0$ з осями координат.

369. Побудуй графік рівняння:

а) $y = |x|$;
б) $y = -|x|$.

www.e-ranok.com.ua

5.3. Система лінійних рівнянь із двома змінними та графічний спосіб її розв'язування

Розглянемо задачу. Сума двох чисел дорівнює 8, а їх різниця дорівнює 2. Знайдемо ці числа.

Позначимо перше число через x, а друге — через y. Їх сума дорівнює 8, тобто $x + y = 8$. Різниця чисел дорівнює 2, отже, $x - y = 2$.

Ми склали два лінійних рівняння з двома змінними. Щоб розв'язати задачу, потрібно знайти такі значення змінних, які задовольняють водночас і перше, і друге рівняння, тобто знайти спільний розв'язок цих рівнянь. У такому випадку кажуть, що потрібно розв'язати **систему рівнянь**.

Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Пару значень змінних $x = 5$, $y = 3$, яка перетворює кожне з рівнянь на правильну числову рівність, називають **розв'язком даної системи рівнянь**.

Пара значень змінних, що перетворює кожне рівняння системи на правильну числову рівність, називається розв'язком системи рівнянь із двома змінними.

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Для розв'язування систем лінійних рівнянь можна скористатися **графічним способом**.

Приклад 1. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x - y = 5, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$$

Розв'язання.

Виразимо в кожному рівнянні y через x:

$$\begin{cases} y = 4x - 5, \\ y = -\frac{3}{2}x + 6. \end{cases}$$

Побудуємо в одній системі координат графіки цих рівнянь, занісши значення змінних до таблиць:

www.e-ranok.com.ua

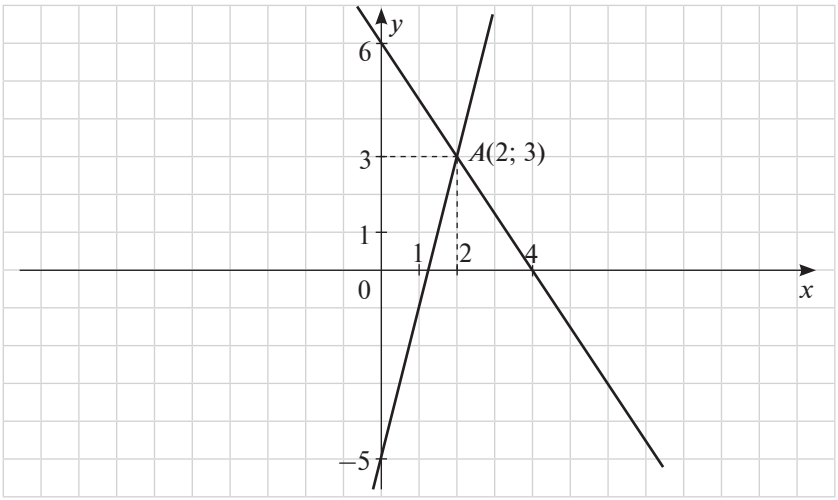
$y = 4x - 5$

x	0	2
y	-5	3

$y = -\frac{3}{2}x + 6$

x	0	4
y	6	0

Розв'язком системи є пара чисел, що задовольняє обидва рівняння системи, тобто координати спільної точки даних прямих (див. рисунок).



Прямі перетинаються в точці $A(2; 3)$. Пара (2; 3) і є розв'язком даної системи.

Підставивши значення $x = 2$, $y = 3$ у систему, отримаємо правильні числові рівності:

$$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 3 = 5, \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12. \end{cases}$$

Для того щоб розв'язати систему рівнянь графічним способом, потрібно побудувати в одній системі координат графіки обох рівнянь системи та знайти координати точок їх перетину.

Згадай правило, наведене на с. 114!

Приклад 2. Розв'яжемо графічно систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x + y = 6, \\ 4x + 2y = 0. \end{cases}$

Розв'язання.

Виразимо y через x:

$$\begin{cases} y = 6 - 2x, \\ y = -2x. \end{cases}$$

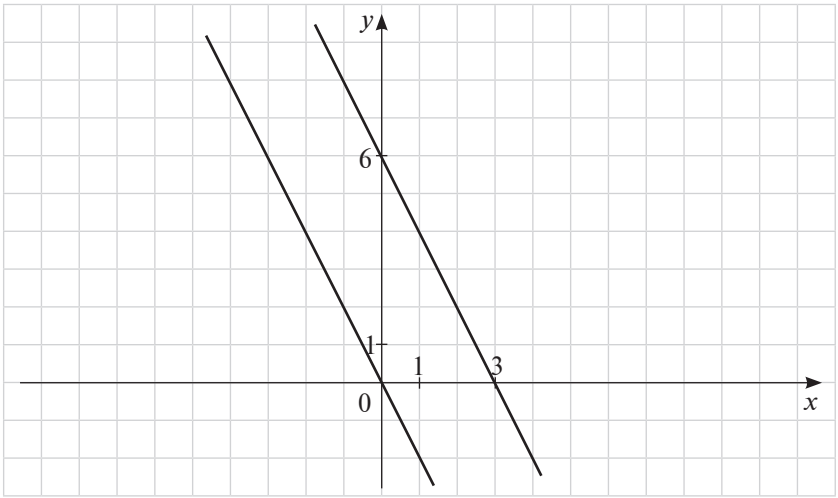
www.e-ranok.com.ua

$y = 6 - 2x$

x	0	1
y	6	4

$y = -2x$

x	0	1
y	0	-2



Графіками рівнянь цієї системи є паралельні прямі (див. рисунок). Вони не мають спільних точок, тому система не має розв'язків.

Зазначимо, що в лінійних рівняннях $y = -2x$ та $y = 6 - 2x$ коефіцієнти при змінній x однакові.

Приклад 3. Розглянемо систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x + y = 6, \\ 4x + 2y = 12. \end{cases}$

Розв'язання.

Виразимо y через x:

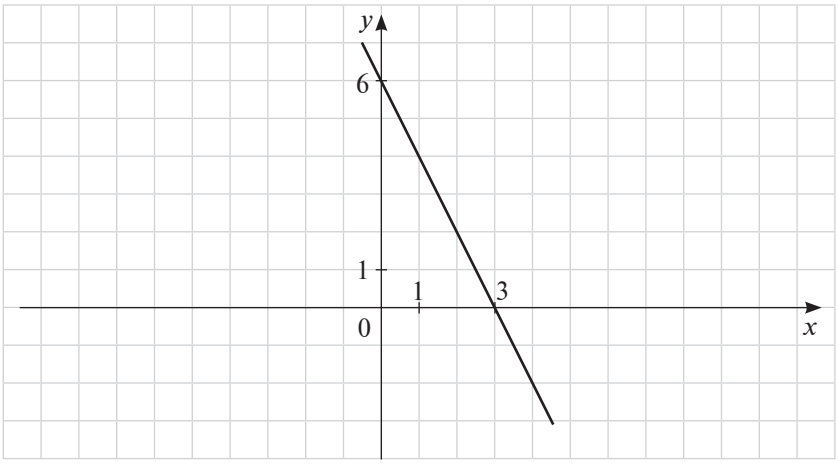
$\begin{cases} y = -2x + 6, \\ y = 6 - 2x. \end{cases}$

Отримані рівняння однакові, отже, їхні графіки збігаються:

x	0	3
y	6	0

Координати будь-якої точки прямої (див. рисунок) є розв'язком даної системи. Це означає, що дана система рівнянь має безліч розв'язків.

www.e-ranok.com.ua



Запитання для самоконтролю

1. Що називається розв'язком системи рівнянь із двома змінними?
2. Що означає розв'язати систему рівнянь?
3. У чому полягає графічний спосіб розв'язування системи рівнянь?
4. Скільки розв'язків може мати система лінійних рівнянь?

5*. Як, не розв'язуючи систему лінійних рівнянь, визначити, чи має вона розв'язки, та знайти кількість цих розв'язків?

Дивись відеоматеріали

370. Розв'яжи графічно систему лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ x - y = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x - y = -1, \\ x + 3y = 3. \end{cases}$

www.e-ranok.com.ua

371. Розв'яжи систему лінійних рівнянь графічно:

а) $\begin{cases} x + 2y = -3, \\ 3x - y = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y = -2, \\ 6x - 3y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 5y = 10, \\ 4x + 10y = 20; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - 2y = 6; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} x - 3y = 3, \\ -2x + 6y = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 12x + 9y = 0, \\ 4x + 3y = 12. \end{cases}$

372. Спрости, а потім розв'яжи графічно:

а) $\begin{cases} (x + 1)^2 + 2y = x^2 + 5, \\ 2x + 3y = x + 2(x + y); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2(x - 3) + (y + 2)^2 = y^2 + 2, \\ (x - 2)^2 - (x - 2)(x + 2) + 4y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x + 3)^2 + 3 = (x + 2)^2 + 4y, \\ x + (y - 2)^2 = (y - 1)^2 + 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5(x + 2) + (y - 3)^2 = y^2 + 49, \\ (x + 5)^2 - 5 = 4(3y + 20) + x^2; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} 5(x + 3) - 4(y - 6) = y + 24, \\ (x + 3)^2 + 3(y + 5) = (x + 2)^2 + 2(y + 10); \end{cases}$

д) $\begin{cases} (2x + 1)^2 + 2(2y + 3) = 4x^2 - 1, \\ 3(x + 7) + (3y - 1)^2 = 9y^2 + 25. \end{cases}$

www.e-ranok.com.ua

5.4. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом підстановки

На відміну від графічного способу розв'язування систем рівнянь, який зазвичай надає нам приблизні значення змінних, розв'язування способом підстановки завжди дає точні значення.

Щоб розв'язати систему способом підстановки, потрібно з будь-якого рівняння виразити одну змінну через іншу, а потім підставити одержаний вираз у друге рівняння. У результаті ми отримаємо рівняння з однією змінною.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 5x - y = 7. \end{cases}$

Розв'язання.

Виразимо y через x із другого рівняння:

$y = 5x - 7.$

Підставимо вираз $5x - 7$ замість y у перше рівняння.

Отримаємо:

$2x + 3(5x - 7) = 13.$

Розв'яжемо це рівняння:

$2x + 15x - 21 = 13;$

$17x = 34;$

$x = 34 : 17;$

$x = 2.$

Тепер знайдемо значення змінної y:

$y = 5 \cdot 2 - 7;$

$y = 3.$

Відповідь: (2; 3).

Отже, для того щоб розв'язати систему лінійних рівнянь **способом підстановки**, потрібно виконати такі дії.

1. **Виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через іншу.**
2. **Підставити у друге рівняння системи замість цієї змінної одержаний вираз.**
3. **Розв'язати отримане рівняння з однією змінною.**
4. **Знайти відповідне значення другої змінної.**

www.e-ranok.com.ua

Приклад 2. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x + 5y = 22, \\ 4x - 9y = -49. \end{cases}$

Розв'язання.

З першого рівняння виразимо x через y і підставимо отриманий вираз у друге рівняння замість x:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(22 - 5y), \\ 4 \cdot \frac{1}{3}(22 - 5y) - 9y = -49. \end{cases}$$

Розв'яжемо окремо друге рівняння системи. Помножимо обидві його частини на 3:

$4(22 - 5y) - 27y = -147;$

$88 - 20y - 27y = -147;$

$-47y = -147 - 88;$

$y = 235 : 47;$

$y = 5.$

Повертаючись до початкової системи, отримаємо:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(22 - 5y), \\ y = 5. \end{cases}$$

Тепер знайдемо значення другої змінної:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(22 - 5 \cdot 5), \\ y = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 5. \end{cases}$$

Відповідь: $(-1; 5)$.

Перевірити правильність розв'язання можна, підставивши отримані значення змінних у початкову систему.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь способом підстановки?
2*. Спробуй сформулювати, в яких випадках користуватися способом підстановки найзручніше.

Дивись відеоматеріали

www.e-ranok.com.ua

373. Розв'яжи систему лінійних рівнянь способом підстановки:

а) $\begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ x = 5y - 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + 1 = y, \\ 5x + 2y = 13; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x - 1, \\ 5x + 2y = 16; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = 2 - y, \\ 3x - 2y - 11 = 0. \end{cases}$

374. Знайди розв'язок системи лінійних рівнянь способом підстановки:

а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 7x - 5y = -34; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + y = 9, \\ 6x - 7y = -23; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + 5y = 7, \\ x - 2y = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 9x - 4y = -10, \\ 6x + y = 19; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} 11x - 8y = -70, \\ 3x - y = -12; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + 7y = 32, \\ 13x - 6y = -69. \end{cases}$

375. Розв'яжи систему лінійних рівнянь способом підстановки:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = -2, \\ 2x - 7y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 11y = 43; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 4x - 5y = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4u + 3v = 14, \\ 5u - 3v = 25; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} 10p + 7q = -2, \\ 2p - 22 = 5q; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x + 1 = 8y, \\ 11y - 3x = -11. \end{cases}$

376. Знайди розв'язок системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2(x + 4y) - 3(y + 5) = 1, \\ 2(2x + 5y) - 2(x + 13) = 5(y - 2); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7(3x - 2) = 2(8x + y), \\ 3(x + 2y) + 2(3 - x - y) = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3(2x - 5y) + 2(7y - 9) = 3(x - 1), \\ 2(3x + 5y) = 7(y + 1) + 2x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5(2x - y) + 3(1 - 2y) = 8(x - y), \\ 3(2x - y - 9) = 2(2 - 4y); \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} 3(5x - 8) - 7(x + y + 1) = 2, \\ 2(4x + y) = 3(x + 9). \end{cases}$

www.e-ranok.com.ua

377. Розв'яжи систему рівнянь:

а) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -4, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{a}{6} - 2b = 6, \\ -3a + \frac{b}{2} = -37; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{2m}{5} + \frac{n}{3} = 1, \\ \frac{m}{10} - \frac{7n}{6} = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{m}{8} + \frac{3n}{4} = 2, \\ \frac{m}{2} - \frac{2n}{5} = 4; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} \frac{x+2}{6} - \frac{y-3}{4} = 1, \\ \frac{x-2}{4} - \frac{y-4}{2} = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{3} - \frac{4x+5}{4} = \frac{7x-10}{8}, \\ \frac{6x-5}{2} + \frac{2x+y}{5} = x + 2y. \end{cases}$

378. Знайди розв'язок системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3(x-9) + (2+y)^2 = (y-1)(y+1), \\ (x+1)^2 - 7(y+2) = (3+x)(x-3) + 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5(x-1) + (y+4)(y-4) = (1+y)^2 - 8, \\ (2x+3)^2 + 4(2y-49) = 9(x+5) + (x+7)(28+4x); \end{cases}$

в) $\begin{cases} (3x+1)^2 = 5(y+10) + 3(x-1)(3+3x), \\ 2(4x+3) = (3-y)^2 - (y-5)(5+y); \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x-2)(2+x) + 9(y-2) = (x-1)^2, \\ (y-7)^2 - (3-x)^2 = (y-x)(x+y) - 14; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} (3x+2)^2 - (11+y)^2 = (3x-y)(y+3x) - 59, \\ 3(2y+5) + (x+2)(x-2) = (7-x)^2 - 2. \end{cases}$

379. Не здійснюючи побудов, знайди координати точки перетину графіків поданих лінійних рівнянь:

а) $7x + 4y = 23$ і $8x - 10y = 19$;

б) $11x - 6y = 2$ і $-8x + 5y = 3$.

www.e-ranok.com.ua

5.5. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом додавання

Розглянутий нами в попередньому параграфі метод розв'язування систем рівнянь із двома невідомими способом підстановки не завжди зручний. Як ти помітив, при вираженні однієї змінної через іншу дуже часто з'являються дроби, навіть коли коефіцієнти початкової системи лінійних рівнянь є цілими числами. Спосіб підстановки особливо зручно застосовувати тоді, коли одна зі змінних має коефіцієнт 1 або -1.

Розглянемо інший метод розв'язування систем рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 5x - 2y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання.

Зазначимо, що коефіцієнти змінної y у заданих рівняннях є протилежними числами, тобто в сумі дають 0.

Складемо ліві та праві частини рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 5x - 2y = 1; \end{cases} \Big| +$$

$$8x = 8;$$

$$x = 1.$$

Підставивши отримане значення x у будь-яке з рівнянь, знайдемо значення y:

$3 \cdot 1 + 2y = 7;$

$2y = 7 - 3;$

$2y = 4;$

$y = 2.$

Відповідь: (1; 2).

Почленне додавання рівнянь системи дає можливість виключити одну зі змінних, якщо коефіцієнти при ній в обох рівняннях протилежні.

Такий спосіб розв'язування називають **способом додавання**.

Приклад 2. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 13, \\ 5x - 3y = 18. \end{cases}$$

www.e-ranok.com.ua

Розв'язання.

Помножимо друге рівняння на -1 і додамо рівняння почленно:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 13, \\ -5x + 3y = -18; \end{cases} \Big| +$$

$$5y = -5;$$
$$y = -1.$$

Підставивши в перше рівняння $y = -1$, знайдемо x:

$5x + 2 \cdot (-1) = 13;$
$5x = 13 + 2;$
$5x = 15;$
$x = 3.$

Відповідь: $(3; -1)$.

Зверни увагу, що друге рівняння можна було не множити на -1. Достатньо було почленно відняти від першого рівняння друге для того, щоб позбутися змінної x.

Приклад 3. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 4y = -2, \\ 5x - 6y = -16. \end{cases}$$

Розв'язання.

Спробуємо зрівняти коефіцієнти при змінній x у рівняннях системи. Для цього помножимо перше рівняння на 5, а друге — на 3:

$$\begin{cases} 3x + 4y = -2, \\ 5x - 6y = -16. \end{cases} \begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot 3 \end{matrix}$$

Віднімемо від першого рівняння друге:

$$\begin{cases} 15x + 20y = -10, \\ 15x - 18y = -48; \end{cases} \Big| -$$

$$38y = 38;$$
$$y = 1.$$

Підставивши отримане значення змінної y у перше рівняння початкової системи, знайдемо x:

$3x + 4 \cdot 1 = -2;$
$3x = -2 - 4;$
$3x = -6;$
$x = -2.$

Відповідь: $(-2; 1)$.

www.e-ranok.com.ua

Можна зробити інакше. Помножимо перше рівняння системи на 3, а друге — на 2:

$$\begin{cases} 3x + 4y = -2, \\ 5x - 6y = -16. \end{cases} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{matrix}$$

Тепер додамо рівняння системи:

$$\begin{cases} 9x + 12y = -6, \\ 10x - 12y = -32; \end{cases} +$$

$$19x = -38;$$

$$x = -2.$$

Змінну y знаходимо з першого рівняння:

$3 \cdot (-2) + 4y = -2;$

$4y = -2 + 6;$

$4y = 4;$

$y = 1.$

Відповідь: $(-2; 1)$.

Отже, щоб розв'язати систему лінійних рівнянь із двома змінними **способом додавання**, потрібно виконати такі дії.

1. **Помножити почленно одне рівняння системи або обидва, добираючи множники так, щоб коефіцієнти однієї зі змінних стали протилежними або рівними числами.**
2. **Додати почленно ліві та праві частини рівнянь, якщо коефіцієнти протилежні, або відняти, якщо вони рівні.**
3. **Розв'язати отримане рівняння з однією змінною.**
4. **Підставити отримане значення змінної в будь-яке з початкових рівнянь і знайти значення другої змінної.**

Запитання для самоконтролю

1. У якому випадку зручно одразу застосовувати спосіб додавання для розв'язування системи рівнянь?
2. У чому полягає алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь способом додавання?

3*. Подумай, як можна назвати числа, на які потрібно множити рівняння системи для того, щоб зрівняти коефіцієнти. Як їх шукати?

Дивись відеоматеріали

www.e-ranok.com.ua

380. Розв'яжи систему рівнянь способом додавання:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ -2x + 7y = 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x - 3y = 2, \\ 8x + 3y = 22; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2u + 3v = 11, \\ -2u + 5v = 13; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3s - 4t = -24, \\ 5s + 4t = 24; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} 4x + y = -6, \\ 4x - 3y = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x + y = 14, \\ 3x + y = 10; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 4x + 3y = -5, \\ 7x + 3y = -11; \end{cases}$

є) $\begin{cases} 12a + 5b = 65, \\ 9a + 5b = 50; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x + 4y = -18, \\ 3x - 2y = 0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 9u + 5v = -17, \\ 4u + 5v = -2. \end{cases}$

381. Розв'яжи систему рівнянь способом додавання:

а) $\begin{cases} 5x + 3y = 5, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x - 4y = -3, \\ 3x + y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 5x + 9y = 10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ 6x - 5y = 21; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} 2u - 5v = 1, \\ 5u + 3v = 18; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 6x + 5y = 15, \\ 4x + 3y = 9; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 6x - 7y = 24, \\ 7x + 6y = 28; \end{cases}$

є) $\begin{cases} 5s + 4t = 11, \\ 2s + 3t = 3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 17p - 2q = 47, \\ 5p - 3q = 9; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 8x + 3y = -17, \\ 7x - 4y = 5. \end{cases}$

382. Спрости рівняння та розв'яжи систему рівнянь способом додавання:

а) $\begin{cases} 2(3x - 4y) = 3(3x + y) - 14, \\ 5(3x + 1) - 4(2y - 3) = 24; \end{cases}$

www.e-ranok.com.ua

б) $\begin{cases} 6(x-2y+1)-5(3x+y+2)+11=0, \\ 7(2x-y)=4(3x+2y)-36; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 8(2x+y)-3(4x-3)+5(y-2)+27=0, \\ 6(x+y-3)-5(2y-3x)=3(x+4)-22; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 9(x+y-2)-7(3x-y+4)=4(3-2x)-38, \\ 3(3y-4x)+4(5x-6)=2(4y-9)-13; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} 5(2x-4y-3)-3(3x-8y)=4(4x-3y)-93, \\ 6(x+y+7)+2(3x-4y-1)=37-3(2x+5y). \end{cases}$

383. Розв'яжи систему рівнянь:

а) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=7, \\ \frac{2x}{3}-\frac{y}{4}=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+x=15, \\ y-\frac{y-x}{5}=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{5}=2, \\ \frac{x}{9}-\frac{y}{6}=-\frac{1}{3}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{x}{6}-\frac{y}{2}=0, \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}-\frac{y+1}{2}=10, \\ 4y-5x=2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{2x+3}{10}+\frac{y+1}{8}=2, \\ 3x-5y=3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \frac{2-x}{7}-\frac{y+1}{3}=5, \\ 2x-y=3; \end{cases}$

є) $\begin{cases} 4y-3x=-1, \\ \frac{y-1}{4}+\frac{x+1}{3}=12; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1, \\ \frac{2x-1}{2}-\frac{3y-1}{3}=\frac{5}{6}. \end{cases}$

384. Розв'яжи систему рівнянь способом додавання, звільнившись спочатку від дробових коефіцієнтів:

а) $\begin{cases} \frac{1}{5}(3x+4)+\frac{1}{2}(y-2)=\frac{3}{10}(x-3), \\ \frac{1}{5}(2x-y+2)=\frac{1}{5}x-\frac{1}{7}(y-5); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{2}(4x+y+3)=\frac{1}{3}(2x+7), \\ \frac{1}{3}(3x-y-4)=\frac{3}{5}(x-1); \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{2}(2x-y+3)-\frac{1}{5}(4y+11)=\frac{1}{2}(3-y), \\ \frac{1}{3}(x+7y-1)=\frac{1}{2}(y+5); \end{cases}$

www.e-ranok.com.ua

г) $\begin{cases} \frac{1}{2}(3x - 2y - 4) + \frac{1}{3}(y + 2) = \frac{1}{3}(x - 3), \\ \frac{1}{2}(x + y - 3) + \frac{1}{7}(y - 5) = \frac{1}{14}y + 12; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{1}{4}(4x + y - 11) = \frac{1}{3}(x - 1) + \frac{1}{12}(y - x) + \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}(2x - y) = \frac{1}{5}(2x + 17); \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{1}{3}(4x - 2y + 7) - \frac{1}{4}(x - y) = \frac{1}{12}x - 1\frac{3}{4}, \\ \frac{1}{2}(3x + 2y - 4) = \frac{1}{3}(y - 5). \end{cases}$

385. Розв'яжи систему рівнянь способом додавання:

а) $\begin{cases} 0{,}75x + 20y = 95, \\ 0{,}32x - 25y = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}5u - 0{,}6v = 0, \\ 0{,}4u + 1{,}7v = 10{,}9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 10x = 4{,}6 + 3y, \\ 4y + 3{,}2 = 6x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} -3b + 10a - 0{,}1 = 0, \\ 15a + 4b - 2{,}7 = 0. \end{cases}$

386. Користуючись формулами скороченого множення, спрости рівняння системи, а потім розв'яжи її способом додавання:

а) $\begin{cases} (x + 1)^2 - (5 + y)^2 = (x - y)(x + y) + y - 9, \\ (1 + 3x)^2 = 9(x^2 + 2) - 5(y + 2); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3(x - 28) + (y + 7)^2 = (y - 1)(1 + y), \\ (2x + 3)^2 = 7(y + 3) + (2x - 1)(2x + 1) - 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (1 + 4x)(4x - 1) + 3(y - 7) = (1 - 4x)^2 + 1, \\ 7(x - 4) + (3y - 1)^2 = 9(y - 1)(y + 1) + 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (2 - y)^2 = 11(2 - x) - (1 - y)(y + 1) - 1, \\ 3(7x - 2) + (3 + y)^2 = (y - 5)(y + 5) + 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4(y + 1)^2 = 7(8 - x) + (2y - 1)(1 + 2y), \\ (1 + 7x)^2 = 3(3y + 18) + (7x - 1)(7x + 1). \end{cases}$

www.e-ranok.com.ua

5.6. Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь

Як ти вже знаєш, багато задач можна розв'язати, якщо спочатку скласти рівняння. Раніше ти стикався із задачами, для розв'язування яких можна було обійтися однією змінною. Тепер розглянемо задачі, зміст яких потребує введення двох змінних.

Приклад 1. Відстань від Києва до Одеси дорівнює 480 км. Назустріч один одному із цих міст одночасно виїхали легковий автомобіль та пасажирський автобус. Через 3 год вони зустрілися. Знайди швидкість автомобіля та швидкість автобуса, якщо автобус за 1,5 год проїжджає таку саму відстань, яку автомобіль проїжджає за 1 год.

Розв'язання.

Нехай швидкість автомобіля x км/год, а швидкість автобуса y км/год. Тоді за 3 год автомобіль проїде $3x$ км, а автобус — $3y$ км. Разом вони проїдуть $(3x + 3y)$ км, що за умовою задачі дорівнює 480 км. Крім того, за 1,5 год автобус проїжджає $1{,}5y$ км, що за умовою дорівнює відстані, яку проїжджає за 1 год автомобіль, тобто x км.

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 480, \\ 1{,}5y = x. \end{cases}$$

Розділимо перше рівняння на 3:

$$\begin{cases} x + y = 160, \\ 1{,}5y = x. \end{cases}$$

Цю систему легко розв'язати способом підстановки, тому що x уже виражено через y:

$$\begin{cases} 1{,}5y + y = 160, \\ x = 1{,}5y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2{,}5y = 160, \\ x = 1{,}5y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 160 : 2{,}5, \\ x = 1{,}5y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 64, \\ x = 96. \end{cases}$$

64 (км/год) — швидкість автобуса,
96 (км/год) — швидкість автомобіля.

Відповідь: 96 км/год; 64 км/год.

www.e-ranok.com.ua

Приклад 2. Скільки потрібно змішати 5-відсоткового та 70-відсоткового розчинів оцтової кислоти, щоб отримати 130 г 30-відсоткового розчину?

Розв'язання.

Нехай потрібно взяти x г 5-відсоткового розчину та y г 70-відсоткового розчину оцтової кислоти. Тоді кількість 30-відсоткового розчину становитиме $(x + y)$ г, що за умовою задачі дорівнює 130 г. В x г 5-відсоткового розчину міститься $0{,}05x$ г оцту, а в y г 70-відсоткового розчину — $0{,}7y$ г оцту. У 130 г 30-відсоткового розчину оцту буде $(0{,}05x + 0{,}7y)$ г, або $0{,}3 \cdot 130 = 39$ (г).

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 130, \\ 0{,}05x + 0{,}7y = 39. \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння на 20 і віднімемо від другого рівняння перше:

$$\begin{cases} x + y = 130, \\ x + 14y = 780; \end{cases} \Big| \; -$$

$13y = 650;$

$y = 650 : 13;$

$y = 50.$

50 (г) — 70-відсоткового розчину.

Знайдемо значення x:

$x + 50 = 130;$

$x = 130 - 50;$

$x = 80.$

80 (г) — 5-відсоткового розчину.

Відповідь: 80 г і 50 г.

Дивись відеоматеріали

387. Знайди два числа, сума яких дорівнює 146, а різниця становить 28.

388. Потроєне перше число на 17 більше за подвоєне друге. Подвоєне перше число на 42 менше від потроєного другого. Знайди ці числа.

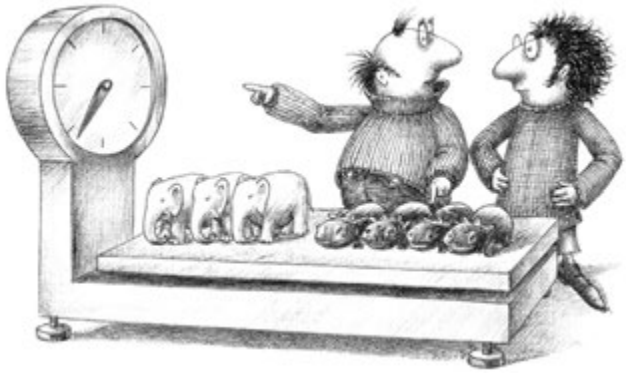
www.e-ranok.com.ua

389. Перше число у 2 рази більше, ніж 80 % другого. Друге число і 60 % першого в сумі дорівнюють 8,6. Знайди ці числа.

390. Маса двох бананів і шести яблук дорівнює 1,4 кг. Маса чотирьох бананів на 80 г більша, ніж маса п'яти яблук. Яка маса одного банана і яка — одного яблука?

391. З двох міст, відстань між якими дорівнює 231 км, назустріч один одному одночасно виїхали автомобіль і мотоцикл. Через 1,5 год вони зустрілися. Знайди швидкості автомобіля й мотоцикла, якщо автомобіль за 2 год проїжджає на 25 км менше, ніж мотоцикл за 2,5 год.

392. Три слони й чотири бегемоти разом важать 30,7 тонни. Чотири слони важчі за дев'ять бегемотів на 800 кг. Знайди вагу слона і вагу бегемота.



393. З міста виїхала вантажівка. Через півгодини в тому самому напрямку виїхав легковий автомобіль, який наздогнав вантажівку через 2 год. Знайди швидкості обох автомобілів, якщо вантажівка за 4 год проїжджає на 18 км більше, ніж легковий автомобіль за 3 год.

394. Якщо чисельник дробу збільшити на одиницю, а знаменник збільшити на два, то вийде дріб, який дорівнює $\frac{2}{3}$. Коли ж чисельник і знаменник цього дробу збільшити на три, то вийде $\frac{4}{5}$. Знайди даний дріб.

395. Периметр прямокутника дорівнює 18 см. Його потроєна одна сторона на 11 см коротша від збільшеної в сім разів другої сторони. Знайди сторони прямокутника.

396. Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 11. Якщо цифри числа поміняти місцями, то отримаємо число, що на 45 більше за початкове. Знайди початкове число.

www.e-ranok.com.ua

397. Двоє робітників виготовляють однакові деталі. Перший робітник за 2 год і другий робітник за 3 год виготовили разом 280 деталей. За 4 год перший робітник виготовив на 10 деталей більше, ніж другий робітник за 5 год. Скільки деталей виготовляє кожен робітник за 1 год?

398. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 23 см, а його бічна сторона, збільшена в 4 рази, на 4 см довша, ніж основа, збільшена в 5 разів. Знайди основу й бічну сторону трикутника.

399. У дев'яти зошитах і одному блокноті разом 272 аркуші. У п'яти зошитах на 8 аркушів більше, ніж у двох блокнотах. Скільки аркушів у зошиті і скільки — у блокноті?

400. У колекціях Миколи та Петра разом 5800 марок. Третина колекції Петра на 20 марок більша, ніж чверть колекції Миколи. Скільки марок у колекції кожного хлопчика?

401. Вік сестри та брата в сумі становить 27 років. Шість років тому брат був у 1,5 разу старший за сестру. Скільки зараз років братові і скільки — сестрі?

402. У гаманці 7 грн 25-копійчаними та 50-копійчаними монетами. Скільки тих і скільки інших монет у гаманці, якщо всього в ньому 23 монети?

403. Скільки води і скільки 80-відсоткового розчину сірчаної кислоти потрібно, щоб отримати 100 г 24-відсоткового розчину сірчаної кислоти?

www.e-ranok.com.ua

404. Якщо до вартості першої книжки додати дві третини вартості другої книжки, то отримаємо 30 грн і 30 к. Вартість другої книжки та дві п'ятих вартості першої в сумі дорівнюють 24 грн. Знайди вартість кожної книжки.

405. Басейн наповнюється через два крани. Через 1 год після того, як було відкрито перший кран, відкрили й другий кран. Через 4 год після того, як було відкрито перший кран, у басейні стало 19 $м^3$ води, а ще через 2 год — 30 $м^3$ води. Скільки кубічних метрів води надходить через кожний кран протягом години?

406. В одну посудину налито 3-відсотковий розчин солі, в іншу — 25-відсотковий розчин солі. Скільки розчину потрібно взяти з кожної посудини, щоб отримати 44 кг 7-відсоткового розчину солі?

407. Периметр прямокутника дорівнює 88 см. Якщо дві його протилежні сторони збільшити на 25 %, а дві інші зменшити на 20 %, то отримаємо прямокутник, периметр якого дорівнює 92 см. Знайди сторони прямокутника.

408. У склянці є 250 г 12-відсоткового розчину сірчаної кислоти. Скільки грамів 70-відсоткового розчину сірчаної кислоти потрібно додати, щоб отримати 30-відсотковий розчин?

409. Пішохід вийшов із міста в напрямку села. Через 1 год в тому самому напрямку виїхав велосипедист, який наздогнав пішохода через 40 хв. Коли після 3 год їзди велосипедист доїхав до села, пішоходу залишалося йти ще 14 км. Знайди швидкості пішохода й велосипедиста. Яка відстань між містом і селом?

410. Вік матері на 2 роки більший, ніж потроєний вік дочки. 5 років тому подвоєний вік матері був на 9 років більший, ніж вік дочки, збільшений у дев'ять разів. Скільки зараз років матері і скільки — дочці?

www.e-ranok.com.ua

411. Щоб випустити воду з басейну місткістю 120 м^3, є дві труби. Через обидві труби басейн спорожнюється за 3 год 20 хв. За 3 год через одну трубу зливається води на 8 м^3 більше, ніж через другу трубу за 2 год. Скільки кубічних метрів води зливається через кожну трубу за 1 год?

412. Під час ремонту будинку треба було пофарбувати 170 м^2 стін. Два маляри працювали разом 2 год, після чого перший маляр сам закінчив роботу за 5 год. За 4 год перший маляр пофарбував на 6 м^2 більше, ніж другий маляр за 3 год. Скільки квадратних метрів стін фарбував кожен маляр за 1 год?

413. З міста виїхав автобус, а через 18 хв у тому самому напрямку виїхав автомобіль. Через півгодини руху автобус зробив 6-хвилинну зупинку, а потім продовжив рух. Ще через 24 хв автомобіль наздогнав автобус. У момент зупинки автобуса автомобіль був від нього на відстані 17 км. Знайди швидкість автобуса і швидкість автомобіля.

414. Дві вантажні машини мали перевезти 67 т вантажу з порту на склад. Після того як машини здійснили 5 поїздок, друга вантажівка зламалася, і перша вантажівка перевезла решту вантажу за 7 поїздок. Друга машина за 3 поїздки перевозить на 1 т вантажу більше, ніж перша за 4 поїздки. Скільки тонн вантажу перевозить кожна машина за 1 поїздку?

415. Два бігуни стартували одночасно й побігли з постійними швидкостями по колу завдовжки 400 м. Через 5 хв перший бігун пробіг на одне коло більше, ніж другий. Перший бігун пробігає за 13 с на 4 м більше, ніж другий за 15 с. Скільки метрів за секунду пробігає кожен бігун? За який час кожен бігун пробігає одне коло?

416. Старовинна задача.

Кінь і мул ішли поруч із важкою поклажею на спині. Кінь нарікав на свою непомірно важку ношу. «Чого ти жаліємся? — відказав мул. — Адже якщо я візьму в тебе один мішок, ноша моя стане вдвічі важча за твою. А от якби ти зняв з моєї спини один мішок, твоя поклажа стала б однакова з моєю». Скажіть-но, мудрі математики, скільки мішків ніс кінь і скільки ніс мул?

www.e-ranok.com.ua

Завдання для тематичного самоконтролю

1. Розв'яжи графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 3x - 2y = 4. \end{cases}$$

2. Розв'яжи систему рівнянь способом підстановки:

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ x + 4y = 2. \end{cases}$$

3. Розв'яжи систему рівнянь способом додавання:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 21, \\ 3x - 10y = -21. \end{cases}$$

4. Розв'яжи систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{11}{12}y = -\frac{1}{4}, \\ \frac{6}{7}x + \frac{1}{4}y = 5\frac{1}{28}. \end{cases}$$

5. У підручнику з математики та в підручнику з географії разом 520 сторінок. У 6 підручниках з математики на 40 сторінок більше, ніж у 5 підручниках з географії. Скільки сторінок у кожному підручнику?

Пройди онлайн-тестування

www.e-ranok.com.ua

Завдання підвищеної складності

1. Морська вода містить 5 % солі. Скільки кілограмів прісної води потрібно додати до 40 кг морської, щоб уміст солі дорівнював 2 %?

2. Виноград містить 70 % води. Скільки ізюму вийде з 1 т винограду, якщо в ізюмі 25 % води?

3. Вік трьох школярів виражається цілими числами, добуток яких дорівнює 1872. При цьому середній за віком школяр старший за молодшого на стільки ж років, на скільки років він молодший від старшого. Обчисли вік школярів.

4. Батько заповів трьом синам 19 коней. Старший син мав отримати $\frac{1}{2}$ табуна, середній — $\frac{1}{4}$, а молодший — $\frac{1}{5}$. Після смерті батька сини не змогли поділити табун і звернулися по допомогу до сусіда. Той привів у табун свого коня, і тепер у ньому стало 20 коней. Старшому братові дісталося 10 коней, середньому — 5 і молодшому — 4. Останнього коня забрав сусід. Чому так вийшло? Чи немає тут помилки?

5. Розв'яжи систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + y - z = 4, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

6. У батька два сини. У кожного сина є сестра. Скільки дітей у батька?

7. Розв'яжи графічно систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} y + 3x = 0, \\ x - y = 4, \\ x + y = -2. \end{cases}$$

8. За якого значення a система лінійних рівнянь $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y = 2, \\ 5x + 2y = a \end{cases}$ не має розв'язків?

www.e-ranok.com.ua

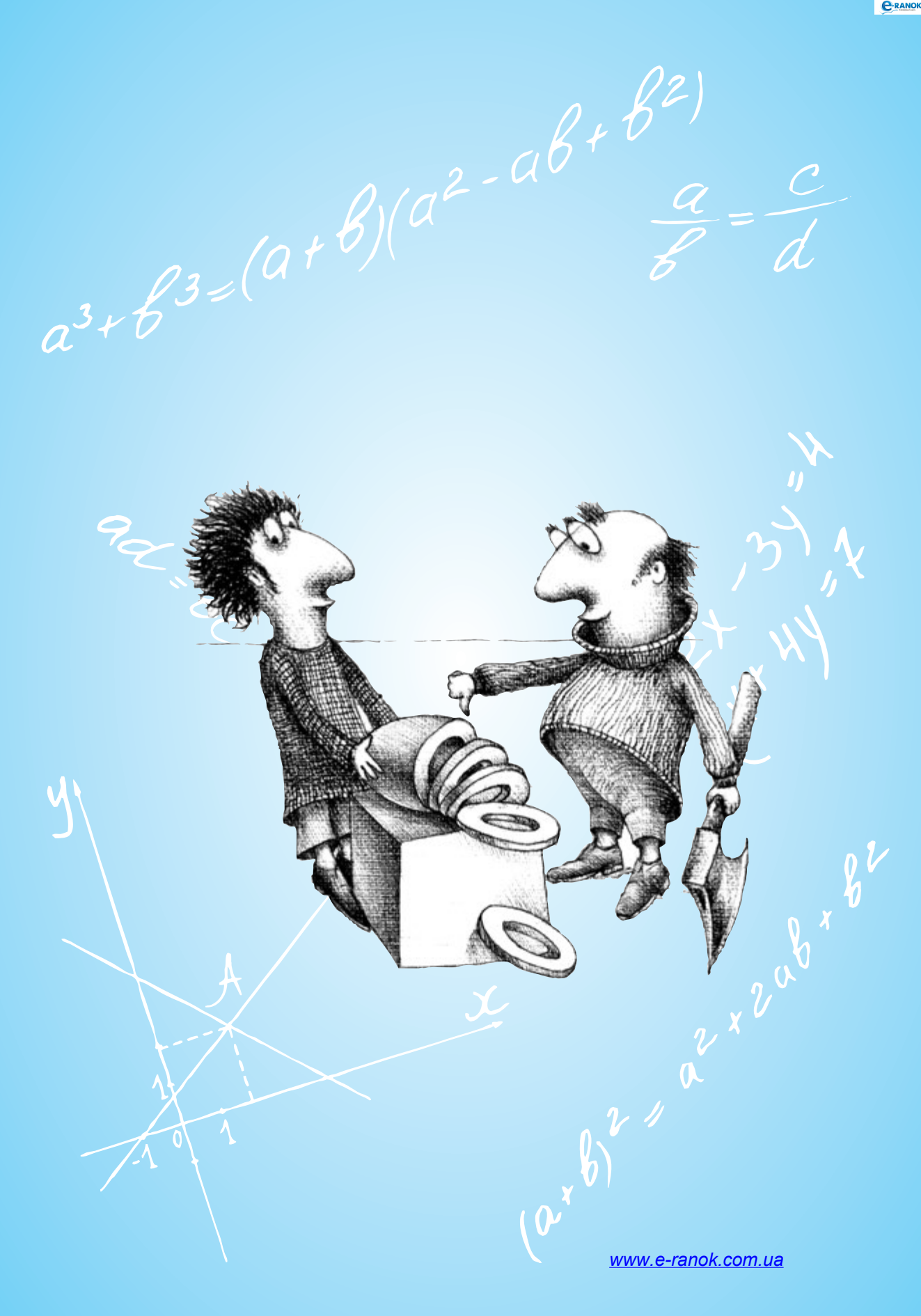
9. Якщо перше число збільшити на 30 %, а друге зменшити на 10 %, то їхня сума збільшиться на 6. Якщо ж перше число зменшити на 10 %, а друге на 20 %, то їхня сума зменшиться на 16. Знайди ці числа.

10. Задача-жарт.

Прилетіли галки
Та сіли на палки.
Як на кожній палці
Сяде по галці,
То одній із галок
Не вистачить палок.

Коли ж на кожну з палок
Сяде двоє галок,
То одна із палок
Лишиться без галок.
Скільки ж було галок?
А скільки було палок?

www.e-ranok.com.ua



www.e-ranok.com.ua

ПОВТОРЕННЯ

Цілі вирази

417. Піднеси до степеня:

а) $(5x)^2$;

б) $(1{,}2uv)^2$;

в) $\left(\frac{t}{3}\right)^3$;

г) $(6ab)^2$;

ґ) $\left(\frac{2uv}{3t}\right)^3$;

д) $(2a^2xy^3)^3$;

е) $(-3b^3u^2v)^2$;

є) $(6s^2tp^4q^3)^3$;

ж) $(0{,}25st^2u^3)^4$;

з) $\left(\frac{5a^2x}{by^3}\right)^4$;

і) $\left(\frac{2a^2bx}{5c^3z^2}\right)^2$;

к) $\left(-\frac{3}{4}s^2u^3v^2\right)^2$;

л) $\left(\frac{-3xy^2z}{4}\right)^3$;

м) $\left(\frac{6tx^3}{s^2}\right)^2$;

н) $\left(\frac{-4}{3xy^2z}\right)^4$.

418. Обчисли:

а) $\frac{3\cdot 8^3-6^4}{3\cdot 2^5}$;

б) $\frac{(2^3-9^0)\cdot 2^3\cdot 3^4}{2^4\cdot 9^3-12^4}$;

в) $\frac{49^3-14^4}{(2^3+3)\cdot 7^4}$;

г) $\frac{25^3+10^5+5^5}{3^3\cdot 5^6-2^3\cdot 5^6}$;

ґ) $\frac{3\cdot 16^4-8^5}{4^8+3^0\cdot 4^7}$;

д) $\frac{16\cdot 4\cdot (12^2-3^2)}{25\cdot 21^5-3^3\cdot 35^4}$.

419. Спрости вираз:

а) $3a^2b(4a-5b)+4ab(2ab-3a^2)$;

б) $8u^2v^2(3u^2-4uv)+6u^3v(7v^2-4uv)$;

в) $\frac{1}{2}xy^3(9x^3-4x^2y)-\frac{2}{3}x^3y^3(7x-3y)$;

г) $1\frac{1}{6}st(2s^4t^3-5s^2t^2)-\frac{1}{2}s^3t^2(5s^2t^2-112t)$;

www.e-ranok.com.ua

г) $\frac{3}{5}st^2(3s^2t - 25st^3) + 2\frac{1}{2}s^2t^3(6t^2 - 7s)$;

д) $\frac{2}{3}uv(6u^2v^2 + 5uv^3) - \frac{3}{4}u^2v^3\left(5\frac{1}{3}u - 2v\right)$;

е) $\frac{1}{5}u^2v\left(3\frac{1}{3}u^3v^4 - 7uv^3\right) - \frac{2}{9}u^2v^3(2uv + 3u^3v^2)$;

є) $\frac{2}{3}a^3b(8ab^2 + 9a^2b) - \frac{2}{5}a^2b^2(15a^3 - 3a^2b)$;

ж) $1\frac{1}{3}uv^3(9t^2u^4 + 2t^3u) - \frac{3}{4}t^2v^2(3tu^2v + 16u^5v)$;

з) $\frac{1}{6}a^3b(2ab^2 - 5a^2b^3) + \frac{1}{15}a^2b^2(4a^3b^2 - 5a^2b)$.

420. Виконай множення і спрости вираз:

а) $(3x - 2y)(4x + 5y) - (2x + y)(6x - 7y)$;

б) $(4a + 3b)(6a - 7b) + (3a + 5b)(5b - 8a)$;

в) $(2s^2 + 7st)(5s^2 - st) - (4s^2 + st)(8st + s^2)$;

г) $(9uv - 2v^2)(u + 3v) + (u + 7v)(3v^2 - 4uv)$;

ґ) $(x^2 + 3y)(2x - 5y^2) - (2x^2 - 7y)(x + 4y^2)$.

421. Розкрий дужки і спрости вираз:

а) $(3x - 2)(x^2 - 2x + 4) - (x^2 - 2)(3x + 5)$;

б) $(5u + 3v)(2u^2 + 6v^2 - 7uv) + (10u - 6v)(3v^2 - u^2)$;

в) $(3a^2 - ab + 4b^2)(2a - 5b) - (3a + 5b)(2a^2 - 7ab - 9b^2) - 25b^3$;

г) $(5s^2 + 2st - 3t^2)(3s + t) + (5s - 4t)(2st - 3s^2) - 33s^2t$;

ґ) $(6x - y)(x^2 - 3y^2 + 5xy) - (2x + 3y)(2y^2 + 7xy + 3x^2) + 3y^3$.

422. Дано чотири послідовних парних числа. Доведи, що різниця між добутком середніх чисел і добутком крайніх чисел не залежить від вибору чисел. Знайди цю різницю. Чи справедливе це твердження для непарних чисел?

423. Двоцифрове число помножили на число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Доведи, що коли від цього добутку відняти добуток цифр заданого числа, то результат завжди буде кратним десяти.

424. Двоцифрове число помножили на суму його цифр. Доведи, що коли від отриманого добутку відняти квадрат цифри одиниць числа, то отримана різниця ділиться на цифру його десятків.

www.e-ranok.com.ua

425. Розклади на множники способом групування:

а) $6 + 2b + b^2 + 3ab$;
б) $3xy - x + 12y - 4$;
в) $4u - 9v + 6uv - 6$;
г) $7s - 12t - 42st + 2$;
ґ) $10xy - 2 - 5x + 4y$;
д) $4uv - 15 + 3v - 20u$;
е) $8t - 21s + 6st - 28$;
є) $12ab + 42a - 2b - 7$;
ж) $15yz - 8 + 6y - 20z$;
з) $27bc + 72b - 6c - 16$.

426. Розклади на множники способом групування:

а) $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$;
б) $6u^3 - 8u^2 + 3u - 4$;
в) $2a^3 - 5a^2 + 6a - 15$;
г) $6s^3 - 9s^2 + 2s - 3$;
ґ) $2t^3 + 8t^2 + 7t + 28$;
д) $12y^3 - 18y^2 + 10y - 15$;
е) $12v^4 + 21v^3 + 8v + 14$;
є) $15b^3 - 5b^2 + 6b - 2$;
ж) $6x^5 + 9x^3 + 14x^2 + 21$;
з) $8u^3 + 20u^2 + 6u + 15$.

427. Винеси множник за дужки й обчисли:

а) $4 \cdot 5{,}82 - 4 \cdot 1{,}82$;
б) $3{,}73 \cdot 6 + 1{,}27 \cdot 6$;
в) $8 \cdot 2{,}16 + 8 \cdot 7{,}84$;
г) $3 \cdot 28{,}2 + 3 \cdot 1{,}8$;
ґ) $3{,}73 \cdot 12 - 1{,}73 \cdot 12$;
д) $9 \cdot 2{,}34 + 18 \cdot 1{,}33$;
е) $6{,}28 \cdot 14 - 2{,}56 \cdot 7$;
є) $4 \cdot 8{,}74 - 8 \cdot 2{,}37$;
ж) $7 \cdot 3{,}61 + 21 \cdot 1{,}13$;
з) $4{,}27 \cdot 18 - 5{,}81 \cdot 6$.

428. Розклади на множники:

а) $(2x - 3)^2 + 4x(2x - 3)$;
б) $(7a - 10)(4a - 7) - (7 - 4a)^2$;
в) $2(3u + 1)^2 - 7(2 + 6u) + (4u + 2)(1 + 3u)$;
г) $(9t + 33)(4t - 5) + 3(5 - 4t)^2 - 7t(12t - 15)$;
ґ) $(5y + 2)^2 - (2 + 5y)(3y - 8) - 2(25y + 10)$.

429. Користуючись формулами скороченого множення, розкрий дужки:

а) $(2a - 5)(2a + 5)$;
б) $(3a - 1)(9a^2 + 3a + 1)$;
в) $(x - 3)^3$;
г) $(4 - u)(u^2 + 16 - 4u)$;
ґ) $(5s - t)^3$;
д) $(2 + 9s)(9s - 2)$;
е) $(6x - 5y)(30xy + 36x^2 + 25y^2)$;
є) $(9x - 8y)^2$;
ж) $(4 - 3x)(8 + 6x)$;
з) $(2a + 5)^2$;
і) $(7t - 6)(18 + 21t)$;
к) $(4u - 9v)(16u^2 + 36uv + 81v^2)$;
л) $(8 - 5y)^2$;
м) $(3a - 2)^3$.

www.e-ranok.com.ua

430. Запиши добуток у вигляді $(a - 0{,}5)(a + 0{,}5)$, де a — ціле число, та обчисли:

а) $9{,}5 \cdot 10{,}5$;
б) $12{,}5 \cdot 13{,}5$;
в) $19{,}5 \cdot 20{,}5$;
г) $14{,}5 \cdot 15{,}5$.

431. Користуючись формулами скороченого множення, розкрий дужки:

а) $(7t + 3)^2$;
б) $(3st + 2)(9s^2t^2 - 6st + 4)$;
в) $(3v - 11u)(11u + 3v)$;
г) $(5y + 4z)^2$;
ґ) $(5a - 3b)^3$;
д) $(12x - 5y)(36x + 15y)$;
е) $(5 - 4ab)(20ab + 16a^2b^2) + 25$;
є) $(4a + 7b)(28b - 16a)$;
ж) $(2u + 3v)^3$;
з) $(5a + 2b)(4b^2 + 25a^2 - 10ab)$;
і) $(3x - 7y)(49y^2 + 21xy + 9x^2)$;
к) $(3s - 13t)^2$;
л) $(7x - 2y)^3$;
м) $(2u + 5v)^3$.

432. Розклади на множники:

а) $16x^2 - 25$;
б) $8u^3 + 12u^2 + 6u + 1$;
в) $16y^3 + 54$;
г) $36s^2 - 25t^2$;
ґ) $169 - 9u^2$;
д) $a^3 - 64$;
е) $x^2 - 14x + 49$;
є) $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$.

433. Розклади на множники:

а) $64p^2 - 80pq + 25q^2$;
б) $125a^3b^3 - 8$;
в) $25x^2 - 40xy + 16y^2$;
г) $196 - 81a^2$;
ґ) $4u^2 + 12uv + 9v^2$;
д) $243p^2 - 12q^2$;
е) $81s^3 - 192t^3$;
є) $8a^3 + 60a^2b + 150ab^2 + 125b^3$.

434. Спрости вираз; якщо можливо, запиши відповідь у вигляді добутку:

а) $(5a - 3)(5a + 3) - (2 + 4a)(4a - 2) - 4$;
б) $(4x - 3)^2 - (3x - 4)^2 - (x - 1)(7 + 7x)$;
в) $5a + (5a + 6)^2 - 5(5a + 3)(a + 2)$;
г) $(7 + 6x)(6x - 7) + 5(5x + 3)(x + 2)$;
ґ) $5(u - 2v)(v - u) + (2u + v)^2 + (u - 3v)^2$;
д) $(14u - 8v)(4v + 7u) + (3v + 4u)(12u - 9v) - 2u^2 - 5v^2$;
е) $(12z + 16y)(4y - 3z) - 2(10z - 6y)(3y + 5z) + 100z^2$;
є) $(5x - 4y)^2 - (3x + 8y)^2 - (2x - 3y)(8x + y)$;

www.e-ranok.com.ua

ж) $(4a - 3b)(3b + 4a) + (3a - 7b)^2 - (3a - 4b)(3a - 10b)$;

з) $(11a - 6b)(11a + 6b) - (8b + 5a)(5a - 8b) + 2(2a - 8b)(a + 4b)$.

435. Задано ціле число. Складемо два нових числа: одне — на 3 більше, ніж задане, а друге — на одиницю менше, ніж потроєне задане. Доведи, що сума квадратів отриманих чисел ділиться на десять.

436. Спрости вираз; якщо можливо, запиши відповідь у вигляді добутку:

а) $(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1) - (a + 2)(a^2 - 2a + 4) - a^2(7a - 4)$;

б) $(3x + 2)(4 + 9x^2 - 6x) - (2x - 1)(4x^2 + 1 + 2x) - 8x(2x^2 - 2x + 3) - 3x^3$;

в) $(2u - 3)(6u + 4u^2 + 9) + (u + 4)(u^2 - 4u + 16) - 5(5u + 7) - 2$;

г) $22s^3 + (3t - s)(9t^2 + 3st + s^2) - 3(2s + t)(t^2 + 4s^2 - 2st)$;

ґ) $3(11u^3 - 3v^3) + (4v - 3u)(12uv + 9u^2 + 16v^2) - 6(u + 2v)(4v^2 - 2uv + u^2)$.

437. Розклади на множники:

а) $x^3 + \frac{1}{27}$;

б) $a^6 + \frac{b^3}{8}$;

в) $\frac{a^3}{64} - 1$;

г) $x^9 - y^6z^3$;

ґ) $125 + \frac{1}{y^3}$;

д) $\frac{27}{u^6} + \frac{8}{v^3}$;

е) $\frac{8}{s^3} + 64t^3$;

є) $\frac{a^9}{64} - \frac{1}{b^6}$;

ж) $u^3 - \frac{125}{v^3}$;

з) $\frac{8s^3}{27} - 64t^6$.

438. Спрости вираз; якщо можливо, запиши відповідь у вигляді добутку:

а) $(2a + 3)^3 - (2a - 3)(4a^2 + 6a + 9) - 27(2a + 5)$;

б) $3(7 - 12x) + (3x - 4)^3 - (3x - 2)(6x + 4 + 9x^2) + 8$;

в) $(3 - 4t)(9 + 12t + 16t^2) - 2(6t + 7) + (4t - 1)^3$;

г) $(3a + b)^3 - 27ab(a + b) + 2b^2(9a - b) + (b - 2)(b^2 + 4 + 2b)$;

ґ) $30y(2x - 3y)(x - y) + (2x - 5y)^3 + 35(y + 1)(y^2 - y + 1) + 29$.

www.e-ranok.com.ua

Функції

439. Побудуй графік функції:

а) $y = 2x - 3$;

б) $y = 2 - \frac{1}{2}x$;

в) $y = -3x + 1$;

г) $y = -4x$;

440. Графік функції $y = ax - 5$ проходить через точку $B(-2; 3)$. Знайди a.

441. Знайди точки перетину графіка функції $y = 3x - 5$ з координатними осями.

442. Знайди точки перетину графіка функції $y = 1{,}5x + 12$ з координатними осями.

443. За якого значення k графік функції $y = kx - 6$ паралельний графіку функції $y = -x$?

444. Чи проходить графік функції $y = \frac{3}{7}x - 6$ через точку $M(-21; -15)$?

445. Визнач, які з точок $A(-32; 0{,}5)$, $B(-0{,}4; -40)$, $C(0{,}25; 64)$ належать графіку функції $y = \frac{16}{x}$.

446. За якого значення k графік функції $y = 7 - kx$ паралельний графіку функції $y = 0{,}6x + 5$?

447. Побудуй графік функції $y = -2x + 6$ і знайди:

а) значення x, за якого значення функції дорівнює 4;

б) значення функції, якщо $x = 4$.

448. Побудуй графік функції $y = |x| - 3$.

449. Побудуй графік функції $y = 2 + |x|$.

www.e-ranok.com.ua

Лінійні рівняння та їх системи

450. Розв'яжи рівняння:

а) $4(x + 3) - 5(2x + 1) = 10$;
б) $6(2x - 5) - 7(x - 2) = 19$;
в) $5(6x - 5) + 4(3 - 2x) = 20$;
г) $5(3x - 1) - 8(x + 3) = 6$;
ґ) $3(5x + 2) + 4(3 - 4x) = 12$;
д) $9(x + 4) - 2(8x - 3) = 14$.

451. Якщо деяке число помножити на 2, від добутку відняти 4, отриману різницю поділити на 8, а потім додати 11, то вийде 15. Знайди це число.

452. Розв'яжи рівняння:

а) $0{,}4(3x + 1) - 0{,}25(2x - 5) = -1{,}5$;
б) $\frac{3}{7}(x - 7) - \frac{2}{9}(2x + 1) = -3\frac{4}{21}$;
в) $\frac{1}{6}(8x - 3) + 0{,}75(2 - 7x) = 4\frac{11}{12}$;
г) $\frac{3}{8}(5x - 4) - 1\frac{1}{4}(3x + 7) = 1$;
ґ) $\frac{1}{3}(4x - 5) - 2{,}5(6x - 1) = \frac{5}{6}$;
д) $\frac{3}{7}(8x - 3) + \frac{2}{5}(3 - 4x) = \frac{29}{35}$;
е) $\frac{3}{16}(7x + 5) - \frac{5}{8}(3x - 1) = \frac{1}{4}$;
є) $\frac{1}{5}(4x + 9) - \frac{2}{3}(5x - 2) = \frac{3}{5}$;
ж) $\frac{4}{9}(2x + 1) - \frac{5}{12}(3x - 2) = \frac{5}{9}$;
з) $0{,}25(3 - 5x) + \frac{1}{6}(7x + 1) = \frac{5}{24}$.

453. Дорогою до школи Сашко робить 840 кроків, кожен з яких дорівнює 0,6 м. Одного разу, пройшовши половину шляху, він збільшив довжину кроку на 10 см. Скільки кроків зробив Сашко?

454. Пасажирський поїзд, що складається з локомотива та 15 вагонів, важить 319 т. Локомотив важить на 4 т менше, ніж 4 вагони. Знайди вагу локомотива й вагу одного вагона.

www.e-ranok.com.ua

455. Відстань між двома містами дорівнює 80 км. З одного міста виїхав перший автомобіль, а через півгодини з другого міста назустріч йому виїхав другий автомобіль. Машини рухалися з однаковою швидкістю й зустрілися на відстані 20 км від другого міста. Знайди швидкості обох автомобілів.

456. Велосипедист їхав з міста в село зі швидкістю 15 км/год, а повертався зі швидкістю 12 км/год. Увесь шлях він проїхав за 2 год 42 хв. Знайди відстань між містом і селом.

457. Через півгодини після початку руху автомобіль збільшив швидкість на 10 км/год, а ще через півтори години опинився на відстані 145 км від пункту відправлення. Якою була початкова швидкість автомобіля?

458. Периметр чотирикутника дорівнює 75 см. Друга сторона на 5 см довша за першу, третя сторона на 6 см коротша за подвоєну другу. Четверта сторона на 50 % довша за першу. Знайди сторони чотирикутника.

459. Розв'яжи графічно систему лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 3x - 2y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y = -3, \\ x + 3y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 1, \\ 4x - y = -2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ x - 3y = 6; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} 2x - y = -2, \\ x + 2y = 9; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x + 4y = 2. \end{cases}$

www.e-ranok.com.ua

460. Розв'яжи систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = 21, \\ 3x - 10y = -21; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4u - v = 15, \\ 8u + 3v = 35; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x - 4y = 22, \\ 7x + 6y = -4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7s = 15 + 6t, \\ 2s - 3t - 3 = 0; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} 5p + 3q = 23 - 3p, \\ 12p - 2q = 27 - 9q; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{13}{20}u - \frac{1}{4}v = \frac{1}{20}, \\ \frac{1}{2}u + \frac{7}{9}v = 4\frac{8}{9}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 20 - 4x + 4y = 5x, \\ 11x + 2y - 42 = 50 - 10y; \end{cases}$

є) $\begin{cases} \frac{1}{2}y - \frac{11}{12}z = -\frac{1}{4}, \\ \frac{6}{7}y + \frac{1}{4}z = 5\frac{1}{28}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x + \frac{13}{18}y = \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{7}x = \frac{1}{14}y - \frac{1}{2}; \end{cases}$

з) $\begin{cases} \frac{1}{2}s + \frac{13}{16}t = 6\frac{5}{8}, \\ \frac{1}{10}s = \frac{1}{3}(t + 1). \end{cases}$

461. Розв'яжи систему рівнянь:

а) $\begin{cases} (2x + 5)^2 - (4x - 3)(5 + x) + 7(y - 7) = 0, \\ 3(4x - 7) + 5(3y - 2) = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3(4x - 3) + (2y + 3)^2 + (1 - 2y)(2y + 1) + 23 = 0, \\ 5(8x - 9) - 6(4 + 5y) = 61; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (2x + 3y)^2 - 4x(x + 3y - 3) + (3 - 9y)(y + 1) = -105, \\ 8(2x - 1) + 7(1 + 2y) = 9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7(3x - 2) + (2 + 3y)^2 + (y - 3)(3 - 9y) + 19 = 0, \\ 3(3 + x) - 4(5y + 9) = 25; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} (1 - 4x)^2 - 5(3y - 12) - (2x - 1)(3+ 8x) + 5 = 0, \\ 6(2x + 7) - 3(2y - 7) = 21. \end{cases}$

462. Сума двох чисел дорівнює 85. Перше число, збільшене в 4 рази, на 4 більше за потроєне друге число. Знайди ці числа.

463. Різниця двох чисел дорівнює 16, а 20 % зменшуваного на 2 більше, ніж 25 % від'ємника. Знайди ці числа.

464. Сім апельсинів і п'ять груш важать разом 2,89 кг. Дванадцять груш на 510 г важчі, ніж 21 апельсин. Знайди вагу однієї груші та одного апельсина.

www.e-ranok.com.ua

465. Пішохід і велосипедист почали рухатися одночасно назустріч один одному з пунктів, відстань між якими дорівнює 57 км, і зустрілися через 3 год. За цей час велосипедист проїхав на 17 км більше, ніж пройшов би пішохід за 7 год. Знайди швидкості велосипедиста й пішохода.

466. Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 13. Після перестановки цифр вийшло число, яке на 27 більше за початкове. Знайди це число.

467. Якщо чисельник дробу збільшити на 1, а знаменник — на 3, то вийде дріб, що дорівнює $\frac{2}{3}$. Коли ж чисельник зменшити на 2, а знаменник збільшити на 1, то вийде $\frac{1}{2}$. Знайди цей дріб.

468. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 32 см. Якщо основу збільшити на 25 %, а бічну сторону зменшити на 20 %, то вийде трикутник із периметром 29,2 см. Знайди основу й бічну сторону трикутника.

469. Бочку, в якій було 200 л води, спорожнили через дві труби. Спочатку відкрили першу трубу, а через 3 хв — другу. Через 8 хв після відкриття першої труби в бочці залишилось 80 л води, а ще через 3 хв — 26 л. Скільки літрів води витікало з кожної труби за 1 хв?

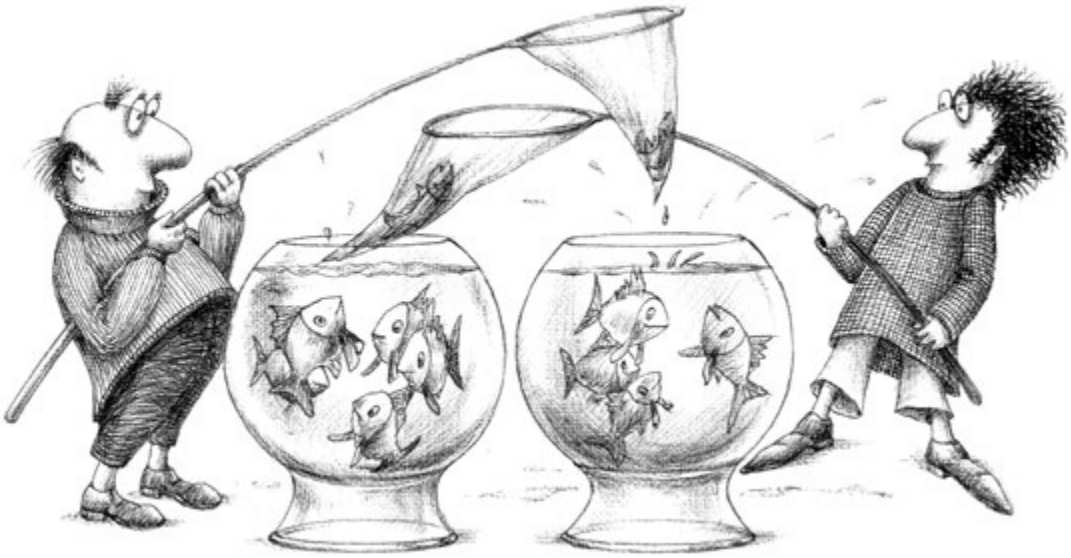
470. Скільки 15-відсоткового і скільки 40-відсоткового розчинів солі треба змішати, щоб отримати 3 кг 30-відсоткового розчину?

471. Два автоматичні верстати виготовляють однакові деталі. Після того як перший верстат працював 2 год, а другий — 3 год, виявилося, що всього виготовлено 1920 деталей. Перший верстат за 20 хв виготовляє на 20 деталей більше, ніж другий верстат — за $\frac{1}{4}$ год. Скільки деталей виготовляє кожен верстат за 1 год?

472. Відстань між двома містами дорівнює 300 км. З першого міста виїхав вантажний автомобіль, а через півгодини з другого міста назустріч йому — легковий автомобіль. Через 2 год після виїзду легкового автомобіля вони зустрілися. Якби легковий автомобіль виїхав на 2 год пізніше за вантажівку, то вони зустрілися б через 1 год 20 хв. Знайди швидкості обох автомобілів.

www.e-ranok.com.ua

473. У двох акваріумах разом 39 рибок. Після того як двох рибок пересадили з першого акваріума до другого, у другому акваріумі стало у 2 рази більше рибок, ніж у першому. Скільки рибок було в кожному акваріумі спочатку?



474. У саду ростуть ягідні кущі та плодові дерева — усього 100 штук. Одна дев'ята частина від числа кущів на одиницю більша за чверть числа дерев. Скільки кущів і скільки дерев росте в саду?

www.e-ranok.com.ua

Завдання для тематичного самоконтролю

1. Розв'яжи рівняння:

$\frac{2}{3}(5x-2)-\frac{3}{4}(3x+1)=3-\frac{1}{2}(2x+1).$

2. Спрости вираз:

а) $(5ab)^6\cdot\left(\frac{a}{25b^2}\right)^3;$

б) $(x-2)^2+(2x-y)(y+3)-4(3y+2).$

3. Розклади на множники:

а) $5x^6y+320x^3y^4;$

б) $(3a-5)(4a+7)-3a(5-3a).$

4. Побудуй графік функції:

а) $y=-2x;$

б) $y=3x-4.$

5. Розв'яжи систему лінійних рівнянь:

$\begin{cases}5x-4y=22,\\7x+6y=-4.\end{cases}$

6. Скільки 50-відсоткового розчину кислоти слід додати до 120 г 25-відсоткового розчину, щоб отримати 30-відсотковий розчин?

Пройди онлайн-тестування

www.e-ranok.com.ua

ДОВІДКОВІ МАТЕРІАЛИ

Означення

Математичні записи, які містять тільки числа, знаки дій та дужки, називаються **числовими виразами**.

Математичні записи, які містять числа, змінні, знаки дій та дужки, називаються **виразами зі змінними**.

Цілим виразом називається вираз, який не містить ділення на змінну.

Рівність двох тотожно рівних виразів називається **тотожністю**.

У записі a^n змінна a називається **основою степеня**, натуральне число n — **показником степеня**, а сам вираз a^n — **степенем,** або **степеневим виразом**.

n*-м степенем числа *a називається добуток n співмножників, кожен з яких дорівнює a, причому n — натуральне, $n > 1$.

Нульовий степінь будь-якого числа, відмінного від нуля, дорівнює одиниці: $a^0 = 1$.

Стандартним виглядом числа називається його запис у формі $a \cdot 10^n$, де $1 \le a < 10$ і n — натуральне число.
Число n називається **порядком числа.**

Одночленом називається вираз, який є добутком лише чисел, змінних та їх натуральних степенів.

Одночленом стандартного вигляду називається такий одночлен, який містить тільки один числовий множник (**коефіцієнт**), що стоїть у його записі на першому місці, а інші множники є степенями різних змінних (степені зазвичай записують в алфавітному порядку змінних).

Степенем одночлена називається сума степенів змінних, що входять до його складу.

Многочленом називається сума одночленів.

www.e-ranok.com.ua

Одночлени, що входять до многочлена, називаються **подібними членами многочлена**, якщо вони мають однакову буквену частину.

Степенем ненульового многочлена називається найбільший зі степенів одночленів, що входять до цього многочлена, коли його зведено до стандартного вигляду.

Функцією (або **функціональною залежністю**) називається правило, за яким кожному елементу однієї множини ставиться у відповідність єдиний елемент іншої множини.

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина всіх точок координатної площини, абсциса кожної з яких дорівнює значенню аргумента x, а ордината — відповідному значенню функції y.

Функція виду $y = kx + b$, де x — незалежна змінна, k і b — будь-які числа, називається **лінійною функцією**.

Прямою пропорційністю називається функція виду $y = kx$, де x — незалежна змінна, $k \neq 0$.

Рівнянням називається рівність, що містить принаймні одну змінну.

Усі значення змінної, за яких рівняння перетворюється на правильну числову рівність, називаються **розв'язками**, або **коренями, рівняння**.

Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.

Рівняння виду $ax + b = 0$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називається **лінійним рівнянням з однією змінною**.

Рівняння виду $ax + by + c = 0$, де x та y — змінні, a, b та c — деякі числа, називається **лінійним рівнянням з двома змінними**.

Пара значень змінних, яка перетворює рівняння на правильну числову рівність, називається **розв'язком рівняння з двома змінними**.

Графіком рівняння з двома змінними називається множина всіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками цього рівняння.

Пара значень змінних, що перетворює кожне лінійне рівняння системи на правильну числову рівність, називається **розв'язком системи лінійних рівнянь із двома змінними**.

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

www.e-ranok.com.ua

Таблиця простих чисел

2	131	307	491	691	911	1117	1361	1579	1811
3	137	311	499	701	919	1123	1367	1583	1823
5	139	313	503	709	929	1129	1373	1597	1831
7	149	317	509	719	937	1151	1381	1601	1847
11	151	331	521	727	941	1153	1399	1607	1861
13	157	337	523	733	947	1163	1409	1609	1867
17	163	347	541	739	953	1171	1423	1613	1871
19	167	349	547	743	967	1181	1427	1619	1873
23	173	353	557	751	971	1187	1429	1621	1877
29	179	359	563	757	977	1193	1433	1627	1879
31	181	367	569	761	983	1201	1439	1637	1889
37	191	373	571	769	991	1213	1447	1657	1901
41	193	379	577	773	997	1217	1451	1663	1907
43	197	383	587	787	1009	1223	1453	1667	1913
47	199	389	593	797	1013	1229	1459	1669	1931
53	211	397	599	809	1019	1231	1471	1693	1933
59	223	401	601	811	1021	1237	1481	1697	1949
61	227	409	607	821	1031	1249	1483	1699	1951
67	229	419	613	823	1033	1259	1487	1709	1973
71	233	421	617	827	1039	1277	1489	1721	1979
73	239	431	619	829	1049	1279	1493	1723	1987
79	241	433	631	839	1051	1283	1499	1733	1993
83	251	439	641	853	1061	1289	1511	1741	1997
89	257	443	643	857	1063	1291	1523	1747	1999
97	263	449	647	859	1069	1297	1531	1753	
101	269	457	653	863	1087	1301	1543	1759	
103	271	461	659	877	1091	1303	1549	1777	
107	277	463	661	881	1093	1307	1553	1783	
109	281	467	673	883	1097	1319	1559	1787	
113	283	479	677	887	1103	1321	1567	1789	
127	293	487	683	907	1109	1327	1571	1801	

www.e-ranok.com.ua

Таблиця квадратів

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Властивості додавання

Переставна $a + b = b + a$

Сполучна $a + (b + c) = (a + b) + c$

Властивості множення

Переставна $a \cdot b = b \cdot a$

Сполучна $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Розподільна $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$

www.e-ranok.com.ua

Дії зі звичайними дробами

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Пропорція

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ a і d — крайні члени; b і c — середні члени

$a \cdot d = b \cdot c$ — основна властивість пропорції

$$a = \frac{b \cdot c}{d};\ b = \frac{a \cdot d}{c};\ c = \frac{a \cdot d}{b};\ d = \frac{b \cdot c}{a}$$

Властивості степеня з натуральним показником

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n},\ m \geq n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$$

Формули скороченого множення

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

www.e-ranok.com.ua

Відповіді

4. 24.
5. 3 км.
6. в) $1\frac{2}{5}$.
7. е) 0,2.
15. а) 350.
16. д) 7,5 %;
к) $11\frac{1}{9}$ %.
17. 3930 грн.
18. а) На 12,5 %.
19. 3936 грн.
20. 12,5 м^2.
21. а) 120; 160; 200.
23. 6 год.
24. 16 робітників.
26. 67,5 кг.
31. 31,25 %.
32. 5,2 π дм.
33. 0,68 π м.
35. 361 π см^2.
44. д) 0,5.
45. в) $-1\frac{8}{15}$.
46. д) $5{,}6b - 7{,}2c$.
52. а; б; г; є.
53. в) 5; 10,6.
55. в) $c^2 + d^2$.
57. г) 4,5.
64. б) −16; −216; −512; −343; 81.
68. б) x^5y^4.
71. а) 64 см^3.
72. б) $\frac{9}{64}$.
73. в) 0,08; $\frac{4}{75}$.
76. г) n^{17}.
77. г) $-\frac{27}{64}$.
79. ж) −1000.
80. г) −79.
82. г) −1,446.
83. г) x^{n+2}.
84. г) 7.
85. а) 5,875;
б) −3,757.
86. г) −126.
87. в) 1000 a^3x^3;
г) 1.
89. г) $-x^{18}$.
90. є) −1.
91. б) $\frac{1}{16}$;
е) 72.
92. г) $\frac{8}{125}$.
93. а) 64.
94. в) $3^{10} \cdot 2^{10}$.
95. г) 4.
96. а) 2;
д) немає коренів;
е) 5.
97. б) 9; −9.
98. г) $71 \cdot 10^{16}$.
99. б) $3{,}5 \cdot 10^{26}$;
д) 7.
100. Приблизно у 81 раз.
103. б) $4{,}15 \cdot 10^{16}$.
104. ≈ 27,3 %.
105. $9{,}46 \cdot 10^{12}$ км; $9{,}46 \cdot 10^{15}$ м.
106. а; б; в; д; е.
107. а; г.
108. е) $-12a^3$; 3;
з) $6ab$; 2.

www.e-ranok.com.ua

109. а) $-4{,}5$; б) 3.
110. г) $-10y^3$.
111. б) $-12x^5$;
е) $-48a^6$.
112. в) $9x^4y^4$;
є) $\frac{1}{128}a^{21}x^{28}y^{14}$.
113. б) $1{,}16ab$.
114. б) $0{,}38ah$.
115. $0{,}9a^2$.
116. в) $15{,}12a^4b^5x^6$.
119. б) $-8x^{30}y^{26}$;
г) $\frac{2}{3}a^8b^{10}$.
121. г) $-4x^2 + 6x - 13$.
123. б) $-2a - 4$.
125. в) $18a - 15b + 1$.
127. в) $7a^5 - 4a^4 + 4a^2 - 7a - 1$.
128. б) $-8b$.
132. б) -2.
133. -13.
134. 56; 57; 58.
135. 15; 16; 17; 18.
136. $6x - 8$; 9; 14.
137. $4x + 2$; 5; 7; 10.
138. *Указівка*. Познач через x число, що стоїть на місці з номером $\frac{n+1}{2}$.
141. в) $-20u^2 + 1{,}8uv + 0{,}2v^2$.
142. д) $-2{,}1x^3y + 10{,}8x^2y^4$.
144. б) -1.
145. г) $1{,}5x^3y - 0{,}6y^3$.
146. 60 л; 15 л.
147. 10 км/год.
149. і) $15x^2 - 17x - 42$.
152. в) $38x^4 - 2x^2 - 22$.
153. б) 3.
157. б) $4a^3 - 4a^2 - 5a - 27$.
158. г) -2.
159. 3; 4.
160. 24.
161. б) 875.
165. г) $121x^2 - xy$.
169. $a^8 - b^8$.
170. а) 8; -8;
г) 4,5; $-1{,}5$.
171. к) $64s^2 + 48st + 9t^2$.
172. к) 2304.
173. е) -119.
175. г) $\left(\frac{1}{7} + x\right)^2$.
177. г) 4.
179. 6 см.
180. 12; 8.
184. в) 80.
186. г) $3(3 + 2v)(3u - 4)$.
187. б) $(z - 1)(2a + 5b)$.
188. д) 1.
189. б) 0; $\frac{1}{13}$.
194. в) $(y + 7)(x - 2)$.
196. б) $(3a + 1)(a^3 + 2)$.
199. б) $(x - 2)(x - 8)$.
201. г) $(a + 3)(a + 13)$.
203. 250.
204. 54.
205. а) $27x^3 + y^3$;
з) $\frac{c^3}{8} - \frac{d^3}{27}$.
208. е) $8q^3 - 125p^6$.
210. г) $t^3 - 36s^2t$.
211. б) $-9a - 8$.
212. в) $(a - 5)(a^2 - 16a + 67)$.
213. в) 2.
214. *Указівка*. Розклади на множники.
216. Так.
218. в) $27y^3 + 27y^2 + 9y + 1$.
219. а) ab^2.
221. г) $9(x^3 - y^3)$.
222. е) 24389.

www.e-ranok.com.ua

223. є) $x^2(9 + x)(9 - x)$.
225. в) $-(x + 2)^2$.
226. г) $(a + 2)(a^2 - 3a + 4)$.
227. г) $(a + b + c - 2d) \times$
$\times (a + b - c + 2d)$.
228. б) $(x + 1)(x + 7)$.
229. б) 0; 2; -2;
г) $\frac{3}{4}$; 1; -1.
234. *Указівка*. Скористайся формулою непарного числа.
238. Ні.
240. в) 11025.
299. б) 4;
г) 2; -2.
300. а; г; д.
301. г) $-2x - 7 = 0$.
302. в) $4x = -11$.
304. г) $3x - 5 = 2x$.
305. в) $9(x - 1) = 14$.
306. а; в; г.
307. д) 4.
308. г) 6.
310. г) $\frac{1}{3}$.
312. в) немає коренів;
г) немає коренів.
313. а) 3; -2;
в) 2; -2; 2,5;
г) 5; -5;
ґ) немає коренів;
д) 0.
315. в) 5,25.
317. в) 8;
д) $\frac{2}{3}$; $-1\frac{1}{3}$.
318. в) 8.
319. г) 10 та 8.
327. 50 сторінок.
329. 32; 34; 36; 38.
333. 1 км; $\frac{1}{3}$ год; $\frac{1}{4}$ год.
338. 20 м^3/год та 15 м^3/год.
339. 9.
340. 1,5 м/с.
342. 15 бджіл.
343. в) $x = \frac{6 - 5b}{4b}$, якщо $b \neq 0$;
немає коренів, якщо $b = 0$;
д) $x = \frac{2(q - p + 1)}{5 - 2p}$, якщо $p \neq 2{,}5$;
безліч коренів, якщо $p = 2{,}5$ та $q = 1{,}5$;
немає коренів, якщо $p = 2{,}5$ та $q \neq 1{,}5$.
354. (6; 6).
355. 19.
357. $-\frac{2}{3}$.
358. а) Ні;
г) (3; 4).
363. а) 0.
374. б) (2; 5).
375. в) $(-3{,}5; -3)$.
376. г) $\left(2\frac{11}{14}; 2\frac{6}{7}\right)$.
377. б) (12; -2).
378. а) (6; 1).
379. б) (4; 7).
380. г) (0; 6).
381. г) (3; 1).
384. б) (1; -1).
386. г) (0; -4).
390. 220 г; 160 г.
393. 72 км/год; 90 км/год.
395. 3,8 см; 5,2 см.
396. 38.
400. 2520 марок; 3280 марок.
404. 19 грн 50 к.; 16 грн 20 к.
408. 112,5 г.
410. 32 роки, 10 років.
413. 85 км/год; 102 км/год.

www.e-ranok.com.ua

Предметний покажчик

А

Аргумент функції 98

В

Виколота точка 113

Винесення спільного множника за дужки 73

Вираз 19
- — зі змінними 19
- — степеневий 24
- — цілий 20
- — числовий 19

Вирази тотожно рівні 20

Вільний член 129

Властивості лінійної функції 112
- — рівнянь основні 126, 150
- — функції $y = kx$ (прямої пропорційності) 115

Г

Графік
- — лінійного рівняння з двома змінними 153
- — лінійної функції 111
- — рівняння з двома змінними 153
- — функції 104

Д

Додавання многочленів 49

Двочлен 49

Ділення степенів 29

З

Задання функції
- — за допомогою таблиці 98
- — описом 100
- — формулою 99

Зведення подібних членів многочлена 48

Змінна залежна 99
- — незалежна 98

К

Квадрат двочлена 66
- — неповний 80
- — числа 24

Коефіцієнт одночлена 43
- — при змінній 129

Корінь рівняння 125

Куб числа 24

Кутовий коефіцієнт прямої 111

М

Многочлен 48
- — нульовий 48

Множення одночленів 43
- — одночлена на многочлен (многочлена на одночлен) 54
- — многочлена на многочлен 59
- — степенів 29

Множина 97
- — значень функції 97

О

Область визначення функції 98, 99
- — значень функції 97, 100

Одночлен 43
- — стандартного вигляду 43
- — нульового степеня 44

Основа степеня 24

П

Параметр 143

Підмножина 97

Піднесення до степеня 24
— — — добутку 33
— — — дробу (частки) 34
— — — одночлена 43
— — — степеня 34
Подібні члени многочлена 48
Показник степеня 24
Порядок числа 39
Правило розкриття дужок 54
Пряма пропорційність 115

Р

Рівняння 125
— з двома змінними (з двома невідомими) 149
— з параметрами 143
— корінь (розв'язок) 125
— лінійне 129
— — першого степеня з однією змінною 129
— — з двома змінними 149
Розв'язок рівняння 125
— — з двома змінними 149
— системи рівнянь із двома змінними 158
Розв'язування системи рівнянь із двома змінними графічним способом 158
— — — — — — способом додавання 167
— — — — — — — підстановки 163
Розкладання многочлена на множники 73
— — — — винесенням спільного множника за дужки 73
— — — — способом групування 76

С

Система рівнянь 158
— лінійних рівнянь з двома змінними 158
Спільний множник 73
Спосіб групування 76
— додавання 169
— графічний 159
— підстановки 163
Стандартний вигляд числа 39
Степінь від'ємного числа 25
— додатного числа 25
— многочлена 49
— нульовий 29
— — нуля 30
— одночлена 44
— числа 24
— — перший 24

Т

Тотожні перетворення виразів 21
Тотожність 20
Тричлен 49

Ф

Формула квадрата різниці 66
— — суми 66
— куба різниці 84
— — суми 84
— різниці квадратів 63
— — кубів 80
— суми кубів 80
Формули скороченого множення 63, 67, 81
Функція 98, 99
— лінійна 111
Функції
— аргумент 98
— графік 104
— область визначення 98, 99
— — значень 97, 100
Функціональна залежність 98

Ч

Член многочлена 48
Числове значення виразу 19

www.e-ranok.com.ua

Зміст

Вступ 3

Повторення

Подільність чисел 7
Звичайні дроби 8
Відношення й пропорції 10
Раціональні числа та дії з ними 14
Завдання для тематичного самоконтролю 17

Глава 1. Цілі вирази

1.1. Вирази зі змінними. Тотожності 19
1.2. Степінь із натуральним показником 24
1.3. Множення та ділення степенів із натуральним показником. Степінь із нульовим показником 29
1.4. Піднесення до степеня з натуральним показником добутку, частки та степеня 33
1.5. Астрономічні числа 39
Завдання для тематичного самоконтролю 42
1.6. Одночлени. Множення та піднесення до степеня одночленів 43
1.7. Многочлени. Додавання та віднімання многочленів 48
1.8. Множення одночлена на многочлен 54
Завдання для тематичного самоконтролю 58
1.9. Множення многочлена на многочлен 59
1.10. Формула різниці квадратів двох виразів 63
1.11. Квадрат двочлена 66
Завдання для тематичного самоконтролю 70
Завдання підвищеної складності 71

www.e-ranok.com.ua

Глава 2. Розкладання многочленів на множники

2.1. Винесення спільного множника за дужки 73
2.2. Розкладання многочлена на множники способом групування 76
Завдання для тематичного самоконтролю 79
2.3. Сума та різниця кубів двох виразів 80
2.4. Куб двочлена 84
2.5. Розкладання многочленів на множники із застосуванням декількох способів 87
2.6. Формули скороченого множення на службі в арифметики 92
Завдання для тематичного самоконтролю 94
Завдання підвищеної складності 95

Глава 3. Функції

3.1. Поняття функції. Способи задання функції 97
3.2. Графік функції. 104
3.3. Лінійна функція 111
3.4. З історії виникнення й розвитку поняття «функція» 120
Завдання для тематичного самоконтролю 122
Завдання підвищеної складності 123

Глава 4. Лінійні рівняння з однією змінною

4.1. Рівняння та його корені. Основні властивості рівнянь 125
4.2. Лінійне рівняння з однією змінною 129
4.3. Розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь. 135
4.4. Лінійні рівняння, що містять параметри 143
Завдання для тематичного самоконтролю 145
Завдання підвищеної складності 146

Глава 5. Системи лінійних рівнянь із двома змінними

5.1. Лінійні рівняння з двома змінними 149
5.2. Графік лінійного рівняння з двома змінними 153
5.3. Система лінійних рівнянь із двома змінними та графічний спосіб її розв'язування. 158

www.e-ranok.com.ua

5.4. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом підстановки 163
5.5. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом додавання 167
5.6. Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь 173
Завдання для тематичного самоконтролю 179
Завдання підвищеної складності 180

Повторення

Цілі вирази 183
Функції 188
Лінійні рівняння та їх системи 189
Завдання для тематичного самоконтролю 194

Довідкові матеріали 195

Відповіді 200

Предметний покажчик 203

www.e-ranok.com.ua

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім'я учня / учениці	Навчальний рік	Стан підручника	
			на початку року	в кінці року
1				
2				
3				
4				
5				

Навчальне видання

ЦЕЙТЛІН Ольга Ігорівна

«АЛГЕБРА»

підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Редактор *Костіна О. В.* Технічний редактор *Сміян О. В.*
Коректор *Долженко Н. Є.*

Т470025У. Підписано до друку 15.09.2015. Формат 70×100/16.
Гарнітура Шкільна. Папір офсетний. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 16,85. Обл.-вид. арк. 20,22.

ТОВ Видавництво «Ранок».
Свідоцтво ДК № 3322 від 26.11.2008. 61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.
Для листів: 61045 Харків, а/с 3355. E-mail: office@ranok.com.ua
Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.
З питань реалізації: (057) 727-70-80, 727-70-77. E-mail: commerce@ranok.com.ua
www.ranok.com.ua

www.e-ranok.com.ua

ОСОБЛИВОСТІ ПІДРУЧНИКА

- доступність викладення навчального матеріалу
- диференціація завдань за рівнями складності
- тематичне узагальнення і систематизація

ІНТЕРНЕТ-ПІДТРИМКА

Матеріали до підручника

interactive.ranok.com.ua

Інтернет-підтримка дозволить:

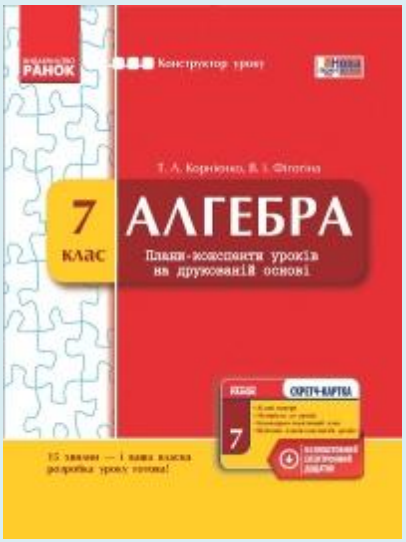
- здійснити інтерактивне онлайн-тестування за кожною темою
- ознайомитись із навчальними відеоматеріалами

ISBN 978-617-09-0403-4

ВИДАВНИЦТВО РАНОК
www.ranok.com.ua

e-RANOK рекомендує:

Електронні книги



Алгебра. 7 клас: плани-конспекти уроків на друк. основі

Алгебра. 7 клас: зошит для контролю навчальних досягнень

Алгебра. 7 клас: розробки уроків

Нас цікавлять Ваші враження та побажання!

Придбайте книжку собі до смаку саме зараз!

e-ranok.com.ua

Ми у соціальних мережах: