

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

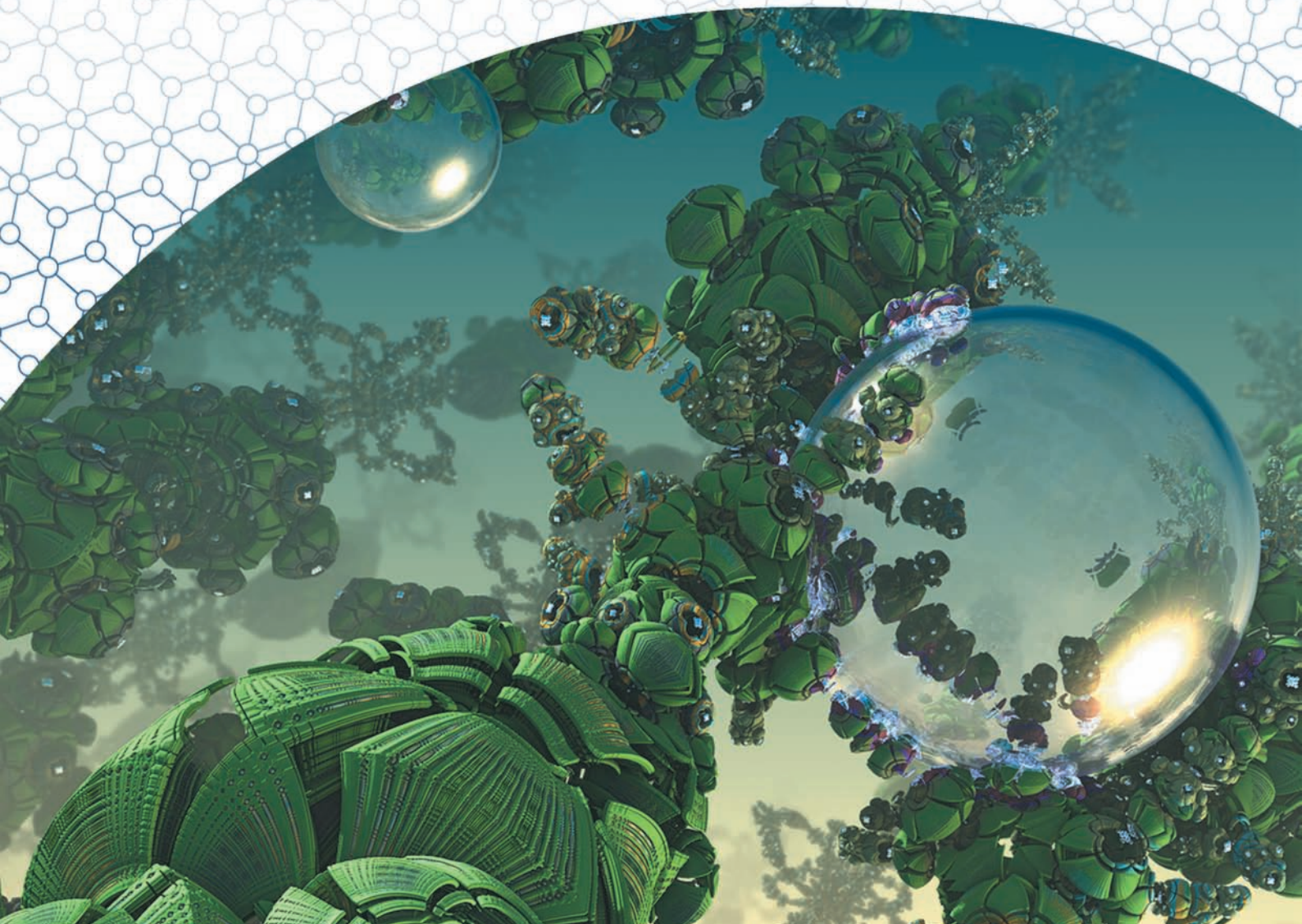


Інтернет-
підтримка

Н. С. ПРОКОПЕНКО
Ю. О. ЗАХАРІЙЧЕНКО
Н. Л. КІНАЩУК

АЛГЕБРА

8





1

РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

Раціональні вирази та рівняння — корисний інструмент для відображення реальних життєвих ситуацій, який допоможе вам:

- розв'язувати задачі на уроках фізики, хімії, біології, інформатики
- грамотно планувати свої витрати, бюджет, приймати обґрунтовані економічні рішення
- планувати подорожі, розраховувати оптимальний час і бюджет подорожі
- визначати витрати на виробництво, рейтинг продукції, прибуток від реалізації товарів; проводити маркетингові дослідження та аналізувати їх результати

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

- Ділення многочлена на многочлен. Теорема Безу
- Скорочене ділення за допомогою схеми Горнера
- Умовні тотожності. Похідні пропорції
- Степінь із цілим показником у хімії, фізиці, біології, інформатиці
- Аліквотні дроби
- Діофант Александрійський та діофантові рівняння
- Числа-велетні
- Функція оберненої пропорційності в економіці



Якщо ти збираєшся одного чудового дня створити щось велике, пам'ятай: один чудовий день — це сьогодні.

Стівен Спілберг

ВЧОРА



Ви познайомилися з цілими виразами, виконували над ними дії

СЬОГОДНІ



Ви дізнаєтеся, що таке дробові вирази, чим вони відрізняються від цілих виразів

ЗАВЖДИ



Зможете прораховувати й обирати найвигідніші фінансові пропозиції щодо придбання необхідних товарів

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Макет першого планшета людство побачило в 1966 р. в серіалі «Star Trek» («Зоряний шлях»). А в 1968 р. співробітники компанії Херох запропонували концепцію планшетного комп'ютера.

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

В одній зі шкіл для учнів 8-го класу замовили k планшетів. Ціна одного планшета становить a грн. Визначте:

- 1) вартість усіх планшетів;
- 2) середню ціну одного планшета, якщо замовлення здійснене через інтернет-магазин і за послуги доставки «Новою поштою» всього комплекту слід додатково сплатити m грн.

Розв'язання

- 1) Оскільки вартість = ціна \times кількість, то вартість усіх планшетів становить $a \times k = ak$ (грн). Загальна вартість усіх планшетів з урахуванням доставки становитиме $(ak + m)$ грн.

- 2) Ціна одного планшета: $\frac{\text{заг. вартість}}{\text{кількість}} = \frac{ak + m}{k}$ (грн).

Вирази ak і $ak + m$ є цілими. Такі вирази знайомі вам з курсу алгебри 7-го класу. Вираз $\frac{ak + m}{k}$ дещо відрізняється від них. Головна відмінність полягає в тому, що цей вираз містить ділення на вираз зі змінною.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- числовий вираз
- вираз зі змінними
- значення виразу
- цілий вираз
- дробовий вираз
- раціональний вираз
- область допустимих значень змінної

ГОЛОВНА ІДЕЯ

У 7-му класі ви розглядали цілі вирази. Пригадайте: цілі вирази — це такі, що складені з чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення на відмінне від нуля число та піднесення до степеня. Цього року ви познайомилися з дробовими виразами.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Цілі вирази

Цілий вираз — вираз, що **НЕ містить** дію ділення на вираз зі змінною. Наприклад:

$$\frac{x+c}{3}; -8; a^2 - b^2; \frac{a}{4} + x^n.$$

Дробові вирази

Дробовий вираз — вираз, що **містить** дію ділення на вираз зі змінною. Наприклад: $\frac{15}{y}$;

$$5x^2 + \frac{1}{x}; 2x:(x-1); \frac{a+16}{c}.$$



Цілі та дробові вирази називають **раціональними виразами**.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

ПРИКЛАД 1

Обчислимо значення раціонального дробу $\frac{9x}{a+x^2}$ при $a=5$, $x=-7$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Переконаємося, що в разі підстановки в даний вираз значень $a=5$, $x=-7$ знаменник не перетворюється на нуль.	$a+x^2=5+(-7)^2=5+49=54; 54 \neq 0$
КРОК 2	Підставимо у вираз замість x значення (-7) , замість a — значення 5.	$\frac{9x}{a+x^2} = \frac{9 \cdot (-7)}{5+(-7)^2}$
КРОК 3	Обчислимо значення отриманого числового виразу.	$\frac{9 \cdot (-7)}{5+(-7)^2} = \frac{-63}{5+49} = -\frac{63}{54} = -\frac{7}{6} = -1\frac{1}{6}$

Відповідь: $-1\frac{1}{6}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Обчисліть значення раціонального дробу:

1) $\frac{20}{a}$ при $a=10$;

5) $\frac{9b}{y^2-2b}$ при $y=-1$, $b=5$;

2) $\frac{-7}{b}$ при $b=14$;

6) $\frac{xa}{x^2+3a}$ при $x=2$, $a=-4$;

3) $\frac{5-x}{2+x}$ при $x=8$;

7) $\frac{5|x|-y}{x^2+2,4x+1,2^2}$ при $x=-0,2$, $y=4$;

4) $\frac{y-2}{y+8}$ при $y=7$;

8) $\frac{10a+|b|}{a^2-2,6a+1,3^2}$ при $a=0,3$, $b=-15$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- $|-3|=3$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Коли говорять, що вираз має зміст, це означає, що можна виконати всі математичні дії, які містить цей раціональний вираз.

У разі підстановки в раціональний вираз чисел замість змінних ми матимемо числовий вираз. Проте при певних числових значеннях змінних є ризик одержати в знаменнику нуль, тобто отримати вираз, що не має змісту.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Дріб має зміст, коли його знаменник не дорівнює нулю.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Областю допустимих значень виразу з однією змінною називають усі значення змінної, при яких цей вираз має зміст.

СЛІД ЗНАТИ!

Область допустимих значень змінної виразу (скорочено — ОДЗ) називають також *областю визначення виразу*.

ПРИКЛАД 2

Знайдемо область допустимих значень змінної виразу $\frac{2}{x-6}$.
Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо значення x , при якому знаменник виразу дорівнює нулю, тобто визначимо нулі знаменника. Для цього розв'яжемо рівняння $x-6=0$.	$x-6=0$ $x=6$
КРОК 2	Зробимо висновок: змінна x може набувати будь-яких значень, крім $x=6$.	$x \neq 6$

Відповідь: x — будь-яке число, крім 6, тобто $x \neq 6$.

ПРИКЛАД 3

Знайдемо область допустимих значень змінної виразу $\frac{3x}{5|x|-20}$.
Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо рівняння для визначення нулів знаменника.	$5 x -20=0$
КРОК 2	Перенесемо доданок, що не містить змінної, у праву частину рівняння та поділимо обидві частини на 5.	$5 x =20$; $ x =4$
КРОК 3	Розв'яжемо рівняння, використовуючи означення модуля числа.	$x=4$ або $x=-4$; $x=\pm 4$

Відповідь: x — будь-яке число, крім 4 і -4 , тобто $x \neq \pm 4$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Знайдіть область допустимих значень виразу:

- 1) $\frac{2}{3x}$; 4) $\frac{3}{x+4}$; 7) $\frac{2x^3-1}{3|x|-12}$;
 2) $-\frac{3}{x}$; 5) $\frac{20x}{4x+32}$; 8) $\frac{x^2-1}{2|x|-10}$.
 3) $\frac{1}{x-5}$; 6) $\frac{10x}{5x-45}$;

ПРИГАДАЙТЕ!

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a > 0, \\ 0, & \text{якщо } a = 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0 \end{cases}$$

Якщо $|x|=2$, то $x=2$ або $x=-2$. Це можна записати так: $x=\pm 2$.

ПРИКЛАД 4

Знайдемо область допустимих значень виразу $\frac{21x}{x+6} + \frac{3-x}{x^2-9}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо знаменник другого дробу на множники.	$x^2-9=(x-3)(x+3)$
КРОК 2	Визначимо нулі кожного знаменника, розв'язавши відповідні рівняння. Пригадаємо: добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю.	1) $x+6=0$, $x=-6$; 2) $(x-3)(x+3)=0$, $x=-3$, $x=3$
КРОК 3	Зробимо висновок: змінна x може набувати будь-яких значень, крім -6 , -3 , 3 .	$x \neq -6$, $x \neq \pm 3$

Відповідь: x — будь-яке число, крім -6 , -3 , 3 , тобто $x \neq -6$, $x \neq \pm 3$.

Вираз $x^2+a=0$, де a — довільне додатне число, не може дорівнювати нулю, оскільки рівняння $x^2+a=0$ не має коренів. Наприклад, вираз x^2+7 ніколи не дорівнює нулю, бо рівняння $x^2+7=0$ не має коренів ($x^2 \neq -7$). Отже, вираз x^2+a (де $a > 0$) завжди набуває лише додатних значень.

СЛІД ЗНАТИ!

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Знайдіть область допустимих значень виразу:

- 1) $\frac{8}{3x} + \frac{32x}{x+2}$; 5) $\frac{x+4}{81-x^2} + \frac{1-x^2}{7x-28}$;
 2) $\frac{4}{5x} - \frac{46x}{x-6}$; 6) $\frac{3x-18}{64-x^2} - \frac{9-x^2}{6x+30}$;
 3) $\frac{x}{x+1} + \frac{x-4}{x^2-16}$; 7) $\frac{x^4-1}{2x^2-32} - \frac{3x}{|x|+10}$;
 4) $\frac{4x}{x-3} + \frac{5+x}{25-x^2}$; 8) $\frac{2x^3}{x^2+4} + \frac{x^2-4}{3|x|-15}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)$$

ПРИКЛАД 5

Визначимо знак дробу $\frac{x-3}{x-7}$ при $x > 12$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Проаналізуємо знаки чисельника і знаменника при $x > 12$.	При $x > 12$ $x-3 > 0$, $x-7 > 0$
КРОК 2	Визначимо знак дробу з урахуванням знаків чисельника та знаменника.	При $x > 12$ $\frac{x-3}{x-7} > 0$

Відповідь: знак «+».

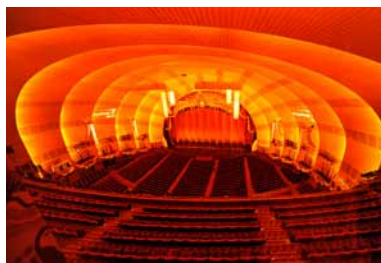
ТРЕНУЄМОСЯ

- Якщо $\frac{a}{b} > 0$, то
 $a > 0$ і $b > 0$ або
 $a < 0$ і $b < 0$.
- Якщо $\frac{a}{b} < 0$, то
 $a > 0$ і $b < 0$ або
 $a < 0$ і $b > 0$.

4) Визначте знак дробу:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1) $\frac{11}{a}$ при $a < -2$; | 5) $\frac{1-a}{4-a}$ при $a > 6$; |
| 2) $\frac{4}{c}$ при $c > 1$; | 6) $\frac{b+1}{3+b}$ при $b < -7$; |
| 3) $\frac{6}{x-3}$ при $x > 4$; | 7) $\frac{x-3}{9+y}$ при $x < 3$, $y > -9$; |
| 4) $\frac{1}{5-y}$ при $y > 10$; | 8) $\frac{5+a}{2-b}$ при $a < -5$, $b > 2$. |

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Кінотеатр Radio City Music Hall, що був відкритий у 1932 р. в Нью-Йорку (США), на момент відкриття став найбільш містким кінотеатром у світі. Він налічує 5933 місць. Сьогодні цей кінотеатр все частіше використовують як концертний зал.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1) Визначте, цілим чи дробовим є вираз:

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $58+a-c-z$; | 3) $\frac{6}{a} + \frac{4}{t^2+1}$; | 5) $\frac{4}{t-2} - \frac{4}{t+2}$; |
| 2) $12a + \frac{a^2}{12}$; | 4) $\frac{19-a}{x+y}$; | 6) $\frac{9}{16} + x^5$; |

2) Обчисліть значення раціонального дробу:

- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{4a^2-1}{a+6}$ при $a=0,5$; | 3) $\frac{4t^4+x^2}{-x^3-t^2}$ при $x=t=1$; |
| 2) $\frac{\frac{1}{3}x+6}{2-0,2x}$ при $x=-30$; | 4) $\frac{3x^3-c}{x^2+c^4}$ при $x=1$, $c=3$. |

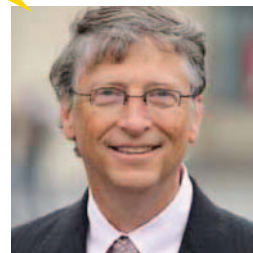
3) У залі кінотеатру 380 місць. Кількість рядів у залі дорівнює n , а кількість місць у кожному ряді становить q . Складіть вираз для визначення кількості місць у ряді. Обчисліть значення q , якщо $n=19$.

- 4) Із двох пунктів A і B , відстань між якими дорівнює 70 км, одночасно назустріч один одному вирушили два мотоциклісти зі швидкостями 35 км/год і a км/год. Мотоциклісти зустрілися через t год. Запишіть вираз, за яким можна визначити час t . Знайдіть значення t , якщо $a = 21$ км/год.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

- Вираз $\frac{5x-2}{y}$ називають цілим виразом.
- Вираз $\frac{ab^2+1}{3}$ називають дробовим виразом.
- Вираз $\frac{5-x}{(x-3)(x+2)}$ не має змісту при $x = -2$.
- Якщо автомобіль витрачає a л пального на b км шляху, то на 100 км шляху автомобіль витрачає $\frac{100a}{b}$ л пального.
- Якщо в місті мешкає m жителів, серед яких n жителів їздять щодня на велосипедах, то значення виразу $\frac{n}{m}$ більше 1 .



Уільям Гейтс (англ. Bill Gates) — співзасновник компанії Microsoft, найбагатша людина світу за версією Forbes з 1995 по 2007 р., у 2009 та з 2014 й донині. Рекордсмен за розміром коштів, переданих на благодійність. Білл Гейтс часто відвідує школи й ділиться з підлітками своїм досвідом і баченням глобальних проблем.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ



Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

- 1) Виберіть серед наведених виразів цілий вираз.

А	Б	В	Г
$\frac{5}{a^2}$	$\frac{a^2}{5}$	$\frac{a+5}{a}$	$\frac{a}{a+5}$

- 2) Дано вираз $\frac{x+1}{x-4}$. Допустимими значеннями змінної x є всі значення, крім:

А	Б	В	Г
$x = -1$	$x = 1$	$x = 4$	$x = -4$

- 3) Виберіть вираз, який має зміст при всіх значеннях змінної.

А	Б	В	Г
$\frac{4}{3x}$	$\frac{4}{3-x}$	$\frac{4}{3+x}$	$\frac{4x}{3}$

- 4) Фітнес-центр щодня відвідують k чоловіків та m жінок. Відомо, що кількість жінок більша за кількість чоловіків. Виберіть дріб, якому може дорівнювати значення виразу $\frac{k}{m}$.

А	Б	В	Г
$\frac{7}{9}$	$\frac{45}{19}$	$\frac{100}{7}$	$\frac{8}{3}$

- 5) На страусиній фермі за 4 дні x страусів споживають y кг корму. Скільки кілограмів корму споживає один страус за один день?

А	Б	В	Г
$\frac{4y}{x}$	$\frac{x}{4y}$	$\frac{y}{4x}$	$\frac{4x}{y}$

- 6 Установіть відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Г), якщо $b = 2$.

1 $\frac{b}{5}$

А 3,5

2 $\frac{2}{b-1}$

Б 2,5

3 $\frac{2b+3}{4-b}$

В 2

Г 0,4

- 7 Визначте знак дробу $\frac{6-y}{y+21}$, якщо:

1) $y > 6$; 2) $y < -25$.

- 8 Дано вираз $\frac{20x^2+21}{4|x|-28}$. Знайдіть:

- 1) область допустимих значень виразу;
2) значення виразу, якщо $x = -0,5$.



ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Дізнатися більше про індекс маси тіла й розрахувати його для всіх членів своєї родини ви можете за посиланням

<http://zhyvlyaktyvno.org/index.php/calculator/kalkulyator-ndeksu-masi-tla-nt>

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ЗДОРОВ'Я»

Індекс маси тіла дозволяє оцінити відповідність між масою людини та її зростом і визначити, чи є маса нормальною, недостатньою або надлишковою. Індекс маси тіла розраховується за формулою $I = \frac{m}{h^2}$, де m (кг) — маса людини, h (м) — зріст людини. Наприклад, значення цього індексу для людини, маса якої становить 60 кг, а зріст — 170 см: $I = \frac{60}{1,7^2} \approx 20,76$.

Визначте індекс маси тіла для себе та членів своєї родини.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

- 1 Обчисліть значення раціонального дробу:

1) $\frac{-6}{y}$ при $y = 24$; 3) $\frac{xy}{y^2-2x}$ при $x = 3$, $y = 4$;

2) $\frac{b-17}{b+10}$ при $b = -1$; 4) $\frac{20x+|y|}{x^2-3,2x+1,6^2}$ при $x = 0,6$, $y = -12$.

- 2 Знайдіть область допустимих значень виразу:

1) $-\frac{6}{x}$; 3) $\frac{1}{x-12}$; 5) $\frac{34x}{3x+27}$; 7) $\frac{3-5x^4}{24-6|x|}$;

2) $\frac{4}{3x}$; 4) $\frac{9}{x+1}$; 6) $\frac{12x}{5x-40}$; 8) $\frac{x^3+8}{14|x|-7}$.

- 3 Знайдіть область допустимих значень виразу:

1) $\frac{6}{5x} + \frac{21x}{x-3}$; 3) $\frac{4x-24}{9-x^2} - \frac{16-x^2}{3x+33}$;

2) $\frac{73x}{x-1} + \frac{1+x}{36-x^2}$; 4) $\frac{4x^5}{x^2+49} - \frac{x^2-9}{2|x|-8}$.



Див. приклад 1



Див. приклади 2, 3



Див. приклади 3, 4

4 Визначте знак дробу:

1) $\frac{1}{y}$ при $y < -1$;

3) $\frac{2+b}{b-9}$ при $b < -2$;

2) $\frac{4}{3-b}$ при $b > 3$;

4) $\frac{7+a}{6-b}$ при $a < -7$, $b > 6$.

5 Складіть вираз для розв'язання задачі:

1) Два кур'єри протягом тижня рознесли разом n пакетів. Кількість пакетів, доставлених першим кур'єром, відноситься до кількості пакетів, доставлених другим кур'єром, як 1:4. Скільки всього пакетів доставив за цей період другий кур'єр?

2) У ресторані швидкого харчування комплексний обід на дві персони коштує x грн. Скільки коштуватиме такий обід на y персон?

3) Маршрутний автобус долає відстань між Києвом та Харковом, що становить 483 км, із середньою швидкістю 80 км/год. Яку відстань (y км) залишилося проїхати цьому автобусу до Харкова через x год після виїзду з Києва?

Див. приклад 5

ПРОФЕСІЯ



Професіональний кур'єр може рознести за робочий день до 200 пакетів кореспонденції. Для роботи кур'єром необхідно мати такі особисті якості: мобільність, пунктуальність, витривалість, порядність, комунікабельність.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

1 Скоротіть дріб:

1) $\frac{62 \cdot 5}{62 \cdot 8}$;

2) $\frac{24 \cdot 11}{22 \cdot 3 \cdot 8}$;

3) $\frac{10^{18}}{5^{20} \cdot 2^{18}}$.

2 Користуючись формулами скороченого множення, розкладіть на множники вираз:

1) $a^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$;

3) $x^2 - 16$;

5) $9n^2 - 0,36$;

2) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 - b^2$;

4) $81 - y^2$;

6) $0,25 - 64y^2$.

3 Подайте у вигляді повного квадрата многочлен:

1) $x^2 - 2ax + a^2$;

4) $16 - 8x + x^2$;

2) $y^2 + 2by + b^2$;

5) $4m^2 - 4mn + n^2$;

3) $x^2 + 6x + 9$;

6) $m^2 + 6mn + 9n^2$.

4 Користуючись формулами скороченого множення, спростіть вираз:

1) $(1-b)^2 + 2b - b^2$;

3) $(40-21)(40+21) + 21^2$;

2) $(a+2)^2 - 4a - a^2$;

4) $(30-17)(30+17) + 17^2$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Розгадайте слово, що зашифровано в числі 1412061412010121.

“ Коли вам спадає на думку гарна ідея, дійте негайно. ”

Білл Гейтс

ВЧОРА



Ви навчилися скорочувати звичайні дроби та зводити їх до спільного знаменника

СЬОГОДНІ



Ви познайомитеся з основною властивістю раціональних дробів

ЗАВЖДИ



Зможете визначати рейтинг продукції та здійснювати правильний вибір

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



- З квітня 1973 р. директор відділу мобільного зв'язку компанії «Моторола» Мартін Купер вперше зателефонував по мобільному телефону під час прогулянки по Манхеттену, чим дуже здивував перехожих.
- У 1997 р. компанія Siemens випустила перший телефон із кольоровим екраном. У 1998 р. побачив світ перший телефон із сенсорним дисплеєм — Sharp PMS-1 Smart-phone. У 2002 р. компанія Ericsson випустила телефони з Bluetooth, а компанія Samsung — перший стільниковий телефон із вбудованою цифровою камерою.

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Журнал, що висвітлює новинки ІТ-технологій, склав рейтинг мобільних телефонів за показниками: G — функціональність, D — дизайн, Q — якість, Z — зручність використання, k — індикатор недоліків. Рейтинг визначався за формулою $R = \frac{5G + 4Q + 3Z + D}{100 + k}$. Користуючись даними таблиці, визначте, яка модель телефону є найбільш рейтинговою.

Модель телефону	Показник				
	G	Q	Z	D	k
A	5	4	4	5	16
B	3	4	5	5	36
C	4	3	4	3	41

Розв'язання

Визначимо рейтинг кожної з моделей за поданою формулою. Отримаємо:

$$R_A = \frac{58}{116} = \frac{1}{2}; \quad R_B = \frac{51}{136} = \frac{3}{8}; \quad R_C = \frac{47}{141} = \frac{1}{3}.$$

Для порівняння дробів окремі з них слід звести до спільного знаменника. Очевидно, що $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$. Оскільки $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ і $\frac{4}{8} > \frac{3}{8}$, то $\frac{1}{2} > \frac{3}{8}$. Отже, найбільший рейтинг має модель A.

Під час розв'язування задач, виконання певних розрахунків досить часто доводиться як скорочувати дроби, так і зводити їх до іншого знаменника шляхом множення чисельника та знаменника на одне й те саме число.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Ви знаєте, що вирази $a+b$ та $b+a$ є тотожно рівними при будь-яких значеннях змінних a і b . Рівність $a+b=b+a$ називають *тотожністю*.

Розглянемо рівність $\frac{2a+a^2+3a}{a-2} = \frac{a^2+5a}{a-2}$. Ця рівність є тотожністю, проте виконується вона при всіх значеннях a , крім $a=2$. При $a=2$ вирази, що утворюють рівність, не мають змісту.

Рівність $\frac{a(a-5)}{a-5} = a$ також є тотожністю при всіх a , крім $a=5$. При $a=5$ рівність не має змісту, оскільки знаменник лівої частини при цьому значенні змінної перетворюється на нуль.

Означення 1. Тотожно рівні вирази — вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких допустимих значеннях змінних.

Означення 2. Тотожність — рівність, що виконується при будь-яких допустимих значеннях змінних.

Ви вже вмієте скорочувати звичайні дроби. Скорочення раціональних дробів виконується аналогічно. Скоротивши раціональний дріб, ми отримуємо дріб, тотожно рівний даному на області допустимих значень змінної.

Основна властивість дробу

для звичайних дробів

Чисельник і знаменник дробу можна помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля, при цьому значення дробу не зміниться:

$$\frac{15}{20} = \frac{15 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{45}{60};$$

$$\frac{15}{20} = \frac{\cancel{3} \cdot 3}{\cancel{3} \cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

для раціональних дробів

Чисельник і знаменник раціонального дробу можна помножити або поділити на один і той самий множник, що тотожно не дорівнює нулю, при цьому значення раціонального дробу не зміниться:

$$\frac{M}{P} = \frac{M \cdot N}{P \cdot N},$$

де M , P , N — многочлени, причому P і N тотожно не дорівнюють нулю.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- тотожно рівні вирази
- тотожність
- основна властивість раціонального дробу
- доповняльний множник
- скорочення раціонального дробу

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!



ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!



$$\frac{M}{P} = \frac{M \cdot N}{P \cdot N},$$

$$P \neq 0, N \neq 0$$

 ПРИКЛАД 1

Скоротимо дріб $\frac{8a^3b}{12abc^2}$, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо найбільший спільний дільник чисел 8 і 12.	4
КРОК 2	Визначимо спільний множник виразів a^3b і abc^2 .	ab
КРОК 3	Розкладемо чисельник і знаменник на множники (з урахуванням кроків 1 і 2).	$\frac{4ab \cdot 2a^2}{4ab \cdot 3c^2}$
КРОК 4	Поділимо чисельник і знаменник отриманого дроби на їх спільний множник $4ab$.	$\frac{\cancel{4ab} \cdot 2a^2}{\cancel{4ab} \cdot 3c^2} = \frac{2a^2}{3c^2}$
Запис розв'язання: $\frac{8a^3b}{12abc^2} = \frac{\cancel{4ab} \cdot 2a^2}{\cancel{4ab} \cdot 3c^2} = \frac{2a^2}{3c^2}$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.		

Відповідь: $\frac{2a^2}{3c^2}$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

 ПРИКЛАД 2

Скоротимо дріб $\frac{8a-4ab}{4ab}$, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо чисельник на множники, для цього винесемо за дужки вираз $4a$.	$\frac{4a \cdot (2-b)}{4a \cdot b}$
КРОК 2	Скоротимо отриманий дріб на спільний множник чисельника та знаменника, тобто на вираз $4a$.	$\frac{2-b}{b}$
Запис розв'язання: $\frac{8a-4ab}{4ab} = \frac{\cancel{4a} \cdot (2-b)}{\cancel{4a} \cdot b} = \frac{2-b}{b}$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$.		

Відповідь: $\frac{2-b}{b}$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$.



СЛІД ЗНАТИ!

Скорочення дроби — це ділення чисельника і знаменника на один і той самий спільний множник, який тотожно не дорівнює нулю та відмінний від 1.

Алгоритм скорочення дробу

1. Розкладіть чисельник і знаменник дробу на множники одним із відомих способів (винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, використання формул скороченого множення тощо).
2. Знайдіть область допустимих значень раціонального дробу.
3. Визначте спільний множник чисельника та знаменника.
4. Скоротіть дріб, поділивши чисельник і знаменник дробу на їх спільний множник.

АЛГОРИТМ



ПРИКЛАД 3

Скоротимо дріб $\frac{16a^2 - 8a + 1}{16a^2 - 1}$.

Розв'язання

В умові не зазначено, при яких значеннях a вираз має зміст. Отже, під час розв'язування ми маємо знайти область допустимих значень виразу. Для цього зручно розкласти знаменник на множники.

ПРИГАДАЙТЕ!

- $(M - P)^2 = (P - M)^2$
- $(M - P)^3 = -(P - M)^3$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо чисельник і знаменник на множники, використовуючи формули скороченого множення.	$16a^2 - 8a + 1 = (4a - 1)^2$ — квадрат різниці; $16a^2 - 1 = (4a - 1) \cdot (4a + 1)$ — різниця квадратів
КРОК 2	Запишемо дріб у вигляді, коли чисельник і знаменник розкладено на множники.	$\frac{(4a - 1)^2}{(4a - 1) \cdot (4a + 1)}$
КРОК 3	Знайдемо область допустимих значень виразу, розв'язавши відповідне рівняння.	$(4a - 1) \cdot (4a + 1) = 0$; $a = \pm \frac{1}{4}$; отже, ОДЗ: $a \neq \pm \frac{1}{4}$
КРОК 4	Скоротимо дріб на спільний множник $(4a - 1)$, відмінний від нуля.	$\frac{4a - 1}{4a + 1}$ при $a \neq \pm \frac{1}{4}$
Запис розв'язання:		$\frac{16a^2 - 8a + 1}{16a^2 - 1} = \frac{(4a - 1)^2}{(4a - 1) \cdot (4a + 1)} = \frac{(4a - 1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(4a - 1)} \cdot (4a + 1)} = \frac{4a - 1}{4a + 1}$ при $a \neq \pm \frac{1}{4}$.

Відповідь: $\frac{4a - 1}{4a + 1}$ при $a \neq \pm \frac{1}{4}$.

 ТРЕНУЄМОСЯ

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

ПРИГАДАЙТЕ!

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b+c)$$

$$a \cdot b - a \cdot c = a(b-c)$$

ПРИГАДАЙТЕ!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$



Усі перетворення раціональних дробів виконують на їх ОДЗ. Надалі будемо знаходити ОДЗ виразу й записувати її у відповідь, лише якщо це вимагатиметься в умові завдання.



КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Щоб звести дріб до нового знаменника, потрібно знайти *доповняльний множник* (або додатковий множник). Для цього можна знаменник, до якого треба звести дріб, поділити на знаменник початкового дробу.



ПРИКЛАД 4

Зведемо дріб $\frac{8m}{3n^2}$ до знаменника $27m^2n^5$.

Розв'язання

1 Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{6a}{a}$; 3) $\frac{5b}{15b^2}$; 5) $\frac{-10c^2}{15c^4}$; 7) $\frac{18c^2b^3}{27ac^8b^3}$;
 2) $\frac{3}{12m}$; 4) $\frac{6a^5}{30a^4}$; 6) $\frac{14x^3y^5}{-7x^2y}$; 8) $\frac{-18bx^4y^3}{-42xy^8}$.

2 Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{7(a+5b)}{a+5b}$; 4) $\frac{x-2y}{3x-6y}$; 7) $\frac{20ab^3-10ab^2}{4ab-8ab^2}$;
 2) $\frac{x+y}{6(x+y)}$; 5) $\frac{18ab-3a}{3ab}$; 8) $\frac{6xy+12x}{15x^2y+30x^2}$.
 3) $\frac{4a+4b}{a+b}$; 6) $\frac{15x}{5x+10xy}$;

3 Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$; 4) $\frac{12(a-b)^4}{a^2-2ab+b^2}$; 7) $\frac{4x^2-4xy+y^2}{2xy-y^2}$;
 2) $\frac{(x-y)^2}{6x^2-6y^2}$; 5) $\frac{a^2-6a+9}{a^2-9}$; 8) $\frac{x^2-16y^2}{x^2+8xy+16y^2}$.
 3) $\frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)^3}$; 6) $\frac{a^2-25}{a^2+10a+25}$;

Крок

Зміст дії

Результат дії

КРОК 1

Розкладемо новий знаменник $27m^2n^5$ на множники так, щоб один із них дорівнював $3n^2$. Можна поділити $27m^2n^5$ на $3n^2$ — частка від ділення й буде доповняльним множником.

$27m^2n^5 = 3n^2 \cdot 9m^2n^3$;
 доповняльний множник — $9m^2n^3$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 2	Помножимо чисельник і знаменник заданого дробу на отриманий доповняльний множник.	$\frac{8m \cdot 9m^2 n^3}{3n^2 \cdot 9m^2 n^3}$
КРОК 3	Виконавши множення в чисельнику та знаменнику, отримаємо шуканий дріб.	$\frac{72m^3 n^3}{27m^2 n^5}$

Відповідь: $\frac{72m^3 n^3}{27m^2 n^5}$.

Алгоритм зведення дробу до нового знаменника

1. Знайдіть доповняльний множник як частку від ділення нового знаменника на знаменник даного дробу.
2. Помножте чисельник і знаменник даного дробу на знайдений доповняльний множник.
3. Виконайте дії в чисельнику та знаменнику отриманого дробу.
4. Запишіть шуканий дріб, ураховуючи ОДЗ.

АЛГОРИТМ



ЧИ ВІДОМО ВАМ?

«Книга про індійський рахунок» великого перського вченого IX ст. Аль-Хорезмі була дуже відомою свого часу. Їм'я вченого переклали як «Ал-Горитмі». Згодом способи розв'язування різних задач стали називати алгоритмами.

ПРИКЛАД 5

Зведемо дріб $\frac{4}{a-b}$ до знаменника $a^2 - b^2$ при $a \neq \pm b$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо на множники новий знаменник, скориставшись формулою різниці квадратів.	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
КРОК 2	Визначимо доповняльний множник як частку від ділення нового знаменника на знаменник заданого дробу.	$\frac{(a-b)(a+b)}{a-b} = (a+b)$
КРОК 3	Помножимо на доповняльний множник чисельник і знаменник заданого дробу.	$\frac{4(a+b)}{(a-b)(a+b)}$
КРОК 4	Виконавши дії в чисельнику і знаменнику, отримаємо шуканий дріб.	$\frac{4(a+b)}{a^2 - b^2}$

Відповідь: $\frac{4(a+b)}{a^2 - b^2}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Зведіть дріб:

1) $\frac{-3}{x}$ до знаменника x^3 ; 3) $\frac{6b}{7a^3}$ до знаменника $14a^3b^5$;

2) $\frac{5x}{3y^3}$ до знаменника $3y^5$; 4) $\frac{7xc}{8m^2}$ до знаменника $32cm^5$.

5) $\frac{4}{b-a}$ до знаменника $b^2 - a^2$;

6) $\frac{y}{x-4y}$ до знаменника $3x-12y$;

7) $\frac{5b}{2-3b}$ до знаменника $4-12b+9b^2$;

8) $\frac{2x-y}{2x+y}$ до знаменника $4x^2+4xy+y^2$.

ПРИГАДАЙТЕ!

• $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot a}{n \cdot a} = \frac{ma}{na}, a \neq 0$

• $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot a \cdot b}{n \cdot a \cdot b} = \frac{mab}{nab}, a \neq 0, b \neq 0$

Знак «мінус», що міститься перед дробом, може бути внесений як у чисельник, так і в знаменник дробу:

$$-\frac{a}{m} = \frac{-a}{m} = \frac{a}{-m}; \quad -\frac{a-c}{n-k} = \frac{c-a}{n-k} = \frac{a-c}{k-n};$$

$$\frac{a-m}{m-a} = -\frac{m-a}{m-a} = -\frac{a-m}{a-m} = -1.$$



СЛІД ЗНАТИ!

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Перед тим як скоротити дріб, чисельник і знаменник необхідно розкласти на множники.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

У чисельнику дробу $\frac{3 \cdot (a+2)}{6}$ останньою дією є множення, тому дріб можна скоротити на 3: $\frac{1 \cdot 3 \cdot (a+2)}{6_2} = \frac{a+2}{2}$.У чисельнику дробу $\frac{3a+2}{6}$ останньою дією є додавання (а не множення), тому скорочувати дріб не можна!

1 Скоротіть дріб, урахувавши область його допустимих значень:

1) $\frac{a(x+7)}{7(x+7)}$;

3) $\frac{9(4-k)}{(k-4)}$;

5) $\frac{20a^2(m-2)}{ab(2-m)}$;

2) $\frac{m(x-2)}{4m(x-2)}$;

4) $\frac{16ab(3c-6)}{4a(4c-8)}$;

6) $\frac{4(c^2-5)}{8(-c^2+5)}$.

2 Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу та скоротіть його:

1) $\frac{a^2+6a}{2a+12}$;

3) $\frac{y^2-9}{3+y}$;

5) $\frac{(m+7)^2}{2m+14}$;

2) $\frac{4a-16}{a^2-4a}$;

4) $\frac{x-5}{25-x^2}$;

6) $\frac{6x-21}{(7-2x)^2}$.

3 Скоротіть дріб, урахувавши область його допустимих значень:

1) $\frac{-x-y}{(x+y)^2}$;

3) $\frac{a^4+a^2}{a^5+a^3}$;

5) $\frac{a-a^{19}}{a^{18}-1}$;

2) $\frac{(m+x)^2}{-2m-2x}$;

4) $\frac{t^2-t^6}{t^8-t^4}$;

6) $\frac{m^3-m^{30}}{m^{28}-m}$.

4 Запишіть частку у вигляді дробу та скоротіть його:

$$1) (8+m^3):(m^2-4);$$

$$4) \frac{a^3-36a}{a^2-12a+36};$$

$$2) (a+5):(a^3+125);$$

$$5) (a^6-a):(a^7-a^2);$$

$$3) (x^2+14x+49):(14+2x);$$

$$6) (-t^7-t^6):(t+1).$$

5 Зведіть дріб:

$$1) \frac{12x^3a}{16x^2a^2} \text{ до знаменника } 4a; \quad 3) \frac{2c^7}{6c^6} \text{ до знаменника } 3;$$

$$2) \frac{24m^2n}{30mn^3} \text{ до знаменника } 5n^2; \quad 4) \frac{16cx^3}{240c^2x} \text{ до знаменника } 15c.$$

6 Популяція морських котиків на деякому острові в 1900 р. становила m особин, а в 1920 р. — $(m-5000)$ особин. У скільки разів зменшилася популяція морських котиків протягом 20 років на цьому острові? Запишіть відповідь у вигляді раціонального виразу та знайдіть його значення, якщо: 1) $m=15\,000$; 2) $m=10\,000$.

7 Скоротіть дріб:

$$1) \frac{(2a+2b)^2}{(a+b)^2};$$

$$3) \frac{t^2-9}{(3t-9)^2};$$

$$5) \frac{25a^2-1}{(15a+3)^2};$$

$$2) \frac{(m-n)^2}{(5m-5n)^2};$$

$$4) \frac{(2t+8)^2}{16-t^2};$$

$$6) \frac{(-3a-6)^2}{a^2+4a+4}.$$

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Значення виразу $\frac{5x}{x-5}$ дорівнює нулю при $x=5$.

2) Вираз $\frac{x-1}{x+1}$ не має змісту при $x=1$.

3) Дріб $\frac{5x-1}{10}$ можна скоротити на 5, отримавши в результаті скорочення вираз $\frac{x-1}{2}$.

4) Дріб $\frac{24a^2b^3}{32cm^2}$ не можна скоротити.

5) Якщо $\frac{x-y}{x^2+y}=50$, то $\frac{2x-2y}{x^2+y}=100$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Цікавий дріб. У цьому ребусі кожна буква позначає одну цифру. Однакові букви позначають однакові цифри, різні букви — різні цифри. Зірочками позначено знаки множення. Чому дорівнюватиме цей дріб після всіх можливих скорочень?

$$\frac{\text{Ц} * \text{І} * \text{К} * \text{А} * \text{В} * \text{І} * \text{Й}}{\text{Д} * \text{Р} * \text{І} * \text{Б}}$$



Професор Стенфордського університету, математик і педагог Джордж Пойа називав математику школою мислення і казав, що хороший учитель має допомогти учню набрати смаку до самостійних логічних міркувань. Автор відомих книг «Як розв'язувати задачу», «Математика і правдоподібні міркування» тощо, Джордж Пойа багато зробив для популяризації математики.



САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

1 Скоротіть дріб $\frac{2b}{6b^3}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{4b^2}$	$\frac{1}{3b^2}$	$3b^2$	$4b^2$

2 Скоротіть дріб $\frac{c-2}{3c-6}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-3	3

3 Чому дорівнює дріб $\frac{3m}{n}$, якщо $\frac{m}{n} = 30$?

А	Б	В	Г
10	$\frac{1}{10}$	60	90

4 На який доповняльний множник слід помножити чисельник і знаменник дробу $\frac{1}{3a}$, щоб звести його до знаменника $6a^2$?

А	Б	В	Г
2	$6a^2$	$3a$	$2a$

5 Науковці Австралії почали використовувати дрони для спостереження за акулами в океані. Першого дня на одному узбережжі дрон зафіксував зграю з a акул, а другого дня — зграю з $(a+9)$ акул. У скільки разів кількість акул, зафіксованих першого дня, була меншою за кількість акул, зафіксованих другого дня?

А	У 9 разів	В	$\frac{a+9}{a}$ разів
Б	$\frac{a}{a+9}$ разів	Г	$\frac{9}{a}$ разів

6 До кожного з виразів (1–3) доберіть тотожно рівний йому серед виразів (А–Г), якщо $x \neq -3$.

1	$\frac{x^2-9}{x+3}$	А	1
2	$\frac{x^2+6x+9}{x+3}$	Б	$x-3$
3	$\frac{(x-3)^2+12x}{(x+3)^2}$	В	$\frac{1}{x+3}$
		Г	$x+3$

7 Відомо, що $\frac{x}{y} = 0,25$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{y}{x}$; 2) $\frac{6y-5x}{x}$.

8 Спростіть вираз $\frac{45x^2-30xa+5a^2}{12x-4a}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Дрон (від англ. drone — джміль) — безпілотний літальний апарат, запрограмований на виконання якихось завдань. Дрони використовують, наприклад, під час пошуку та рятувальних операцій, для переміщення вантажів (їжі, медикаментів тощо) у важкодоступну місцевість, для збору даних про врожай, спостереження за пересуванням тварин, фотографування з висоти та ін.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «СТРАХОВІ КОНСУЛЬТАНТИ»

Результати продажу консультантами страхових полісів за тиждень наведено в таблиці.

Консультант	День тижня					
	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб
Антон	21	34	18	29	55	42
Олена	10	19	24	45	50	54
Віталій	42	30	17	37	48	39
Софія	25	43	38	16	49	33

Проаналізуйте ефективність роботи консультантів, давши відповідь на такі запитання.

- 1) Хто з консультантів продав найбільше полісів?
- 2) Складіть рейтинг консультантів за кількістю проданих полісів (у порядку зменшення кількості).
- 3) Якою є середня кількість полісів, проданих усіма консультантами за один день? Результат округліть до цілих.
- 4) У який день було продано найменшу кількість полісів?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

- 1) Скоротіть дріб:

$$1) \frac{30x^4y}{12x^4y^3}; \quad 3) \frac{81x^2+18x+1}{81x^2-1}; \quad 5) \frac{9x^2-6xy+y^2}{3xy-y^2};$$

$$2) \frac{5a^2b}{10a^2+5a^2b}; \quad 4) \frac{a^2-36}{a^2-12a+36}; \quad 6) \frac{x^2-49y^2}{x^2+14xy+49y^2}.$$

- 2) Зведіть дріб:

$$1) \frac{9b^3}{4a} \text{ до знаменника } 8a^2b^2;$$

$$2) \frac{a}{a+3b} \text{ до знаменника } a^2-9b^2;$$

$$3) \frac{7b}{4b-3} \text{ до знаменника } 16b^2-24b+9;$$

$$4) \frac{7x-y}{7x+y} \text{ до знаменника } 49x^2+14xy+y^2.$$

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ



Професія страхового агента є втіленням сучасних тенденцій розвитку бізнесу. Шляхи одержання професії: навчання в середньому спеціальному або вищому навчальному закладі за фахом «Страхова справа», «Керування страхуванням», «Комерційне і соціальне страхування».

Див. приклади 1, 2, 3

Див. приклади 4, 5

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Кароліно-Бугаз — курортний регіон на Чорноморському узбережжі Одеської області, розташований на початку піщаної коси, що розмежовує Чорне море та Дністровський лиман. Вважається одним із найбільш екологічно чистих місць на цьому узбережжі.

3 Середня температура повітря на Чорноморському узбережжі поблизу Одеси становила $(3x)^\circ\text{C}$. Вода в морі прогрілася в середньому до $(x+2)^\circ\text{C}$. У скільки разів температура повітря була більшою за температуру води? Запишіть відповідь у вигляді раціонального виразу та знайдіть його значення, якщо: 1) $x=8$; 2) $x=10$.

4 Скоротіть дріб:

$$1) \frac{3(x-4)^2}{(x-4)^2}; \quad 3) \frac{(2x-2)^3}{(x-1)^5}; \quad 5) \frac{x^2-2xy+y^2}{(5y-5x)^2};$$

$$2) \frac{2p-10}{(p-5)^2}; \quad 4) \frac{(x+1)^6}{(3x+3)^3}; \quad 6) \frac{(6a+6b)^2}{a^2+2ab+b^2}.$$

5 Відомо, що $a+3b=10$. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{40}{a+3b}; \quad 2) \frac{(a+3b)^3}{200}; \quad 3) \frac{4a^2+24ab+36b^2}{50}.$$

6 Відомо, що $ab=5$. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{ab}{15}; \quad 2) \frac{abc}{10c}; \quad 3) \frac{a^2b^2y^5}{100y^5}; \quad 4) \frac{125b^3n^6}{a^2b^5n^6}.$$

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

1 Виконайте дії:

$$1) \frac{2}{9} + \frac{5}{9} - \frac{11}{9}; \quad 2) 18 - 3\frac{2}{17}; \quad 3) 6\frac{5}{7} - 2\frac{3}{7}.$$

2 Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{29}{32} - x = \frac{13}{32}; \quad 2) \frac{x}{38} + \frac{14}{38} = \frac{23}{38}; \quad 3) \left(\frac{13}{17} + x\right) - \frac{2}{17} = -\frac{23}{17}.$$

3 До чемпіонату світу з футболу оновлювали покриття футбольного поля. Першого дня покрили $\frac{7}{36}$ площі поля, а другого дня — $\frac{11}{36}$ площі. Яку площу поля (у км^2) залишилося покрити, якщо поле має форму прямокутника, ширина якого становить 90 м, а довжина — 120 м?

“ Розв'язування задач — практичне мистецтво, подібне до плавання, катання на лижах або гри на фортепіано; навчитися його можливо, тільки наслідуючи гарним зразкам та постійно практикуючись. ”

Джордж Пойа

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Андрій Шевченко — легендарний український футболіст, найкращий бомбардир в історії національної збірної України з футболу. У 2003 р. став першим українцем, який виграв Лігу чемпіонів. У 2004 р. отримав приз «Золотий м'яч» як найкращий футболіст Європи.

ВЧОРА



Ви дізналися, як додавати та віднімати звичайні дроби

СЬОГОДНІ



Ви навчитеся додавати та віднімати раціональні дроби

ЗАВЖДИ



Зможете прораховувати власний бюджет і приймати правильні економічні рішення

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

На закупівлю призів для переможців математичної олімпіади було виділено A грн, із них B грн — на флешки й C грн — на навушники. Скільки коштує один подарунковий набір, до якого входять одна флешка й одна пара навушників, якщо ці набори розраховані на N призових місць?

Розв'язання

Очевидно, що $A = B + C$. Ціна однієї флешки становить $\frac{B}{N}$ грн, а ціна однієї пари навушників — $\frac{C}{N}$ грн. Таким чином, один подарунковий набір коштує $\left(\frac{B}{N} + \frac{C}{N}\right)$ грн.

З другого боку, оскільки всі набори однакові, ціну одного з них можна визначити, поділивши загальну суму виділених коштів на кількість наборів. Таким чином, отримуємо тотожність $\frac{B}{N} + \frac{C}{N} = \frac{B+C}{N} = \frac{A}{N}$.

Раціональні дроби додаються або віднімаються за таким самим алгоритмом, що й звичайні дроби. Єдине, що слід взяти до уваги: дії виконуються лише на області допустимих значень виразу.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Ви вже вмієте виконувати арифметичні дії зі звичайними дробами. Пригадаємо, що:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \text{ де } a, b, c \text{ — деякі числа, причому } c \neq 0.$$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



За результатами Європейської математичної олімпіади для дівчат EGMO 2015 р. команда України посіла перше місце. В олімпіаді взяли участь 109 дівчат із 30 країн світу, у тому числі із США, Індії, Японії, Італії, Франції, Великобританії, Польщі.

Дізнатися більше ви можете на сайті www.matholymp.com.ua.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- додавання та віднімання раціональних дробів
- скорочення раціональних дробів
- область допустимих значень

**ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!**

Щоб **додати** раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити без змін.

Щоб **відняти** раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба відняти їх чисельники, а знаменник залишити без змін.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c},$$

де a, b, c — многочлени, причому $c \neq 0$.

**АЛГОРИТМ**

Алгоритм додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками

1. Запишіть дію додавання (віднімання) чисельників дробів, використовуючи спільну риску, а знаменник залиште без змін.
2. Виконайте в отриманому чисельнику відповідні дії додавання (віднімання).
3. Розкрийте дужки й зведіть подібні доданки, якщо потрібно.
4. Скоротіть отриманий дріб, якщо це можливо.

**ПРИКЛАД 1**

Виконаємо дії: $\frac{9}{a-3} - \frac{a^2}{a-3}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо область допустимих значень виразів.	ОДЗ: $a \neq 3$
КРОК 2	Застосуємо правило віднімання дробів з однаковими знаменниками та запишемо різницю, використовуючи спільну риску.	$\frac{9-a^2}{a-3}$
КРОК 3	Перевіримо, чи можна скоротити отриманий дріб. Для цього розкладемо на множники чисельник дробу.	$\frac{(3-a)(3+a)}{a-3}$
КРОК 4	Оскільки $a-3 = -(3-a)$ і $\frac{a}{-m} = -\frac{a}{m}$, винесемо знак «-» із знаменника і поставимо його перед дробом.	$-\frac{(3-a)(3+a)}{3-a}$
КРОК 5	Скоротимо дріб на вираз $(3-a)$, що не дорівнює нулю на ОДЗ ($a \neq 3$).	$-(3+a)$ при $a \neq 3$

Відповідь: $-(3+a)$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Виконайте дії:

$$1) \frac{3}{x} - \frac{8}{x};$$

$$5) \frac{25}{y+5} - \frac{y^2}{y+5};$$

$$2) \frac{12}{a} - \frac{4}{a};$$

$$6) \frac{b^2}{b-7} - \frac{49}{b-7};$$

$$3) \frac{3x+3}{3x+15} + \frac{12}{3x+15};$$

$$7) \frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+4)} - \frac{2ab}{(a-b)(a+4)};$$

$$4) \frac{14+x}{14-5x} - \frac{6x}{14-5x};$$

$$8) \frac{x^2+y^2}{(y+16)(x+y)} + \frac{2xy}{(y+16)(x+y)}.$$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$\frac{a-b}{b-a} = -1$$

ПРИКЛАД 2

Дано вираз $\frac{10x^4+5x^9-20x^2}{5x^4}$, де $x \neq 0$. Поділіть почленно чисельник виразу на його знаменник.

Розв'язання

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}, c \neq 0$$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Поділимо почленно чисельник дробу на його знаменник.	$\frac{10x^4}{5x^4} + \frac{5x^9}{5x^4} - \frac{20x^2}{5x^4}$
КРОК 2	Скоротимо кожний із дробів в отриманій сумі. Зауважимо, що отриманий вираз є сумою цілого виразу та дробового.	$2 + x^5 - \frac{4}{x^2}$

Відповідь: $2 + x^5 - \frac{4}{x^2}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Поділіть почленно чисельник поданого виразу на його знаменник:

$$1) \frac{a+2}{a}, \text{ де } a \neq 0; \quad 5) \frac{12m-3m^6+9m^4}{3m^4}, \text{ де } m \neq 0;$$

$$2) \frac{b-5}{b}, \text{ де } b \neq 0; \quad 6) \frac{6n^8-4n^5-2n^3}{2n^5}, \text{ де } n \neq 0;$$

$$3) \frac{3x+x^3}{x^2}, \text{ де } x \neq 0; \quad 7) \frac{20(a+2b)^5-4(a^2+4ab+4b^2)}{20(a+2b)^2}, \text{ де } a \neq -2b;$$

$$4) \frac{7y-y^4}{y^3}, \text{ де } y \neq 0; \quad 8) \frac{7(3x-y)^4-70(9x^2-6xy+y^2)}{35(3x-y)^2}, \text{ де } y \neq 3x.$$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Спробуйте за 40 секунд без допомоги калькулятора визначити, який із добутків є більшим — 351 354 чи 352 353.

 ПРИКЛАД 3

Побудуємо графік функції $y = \frac{2x^2 - 4x}{x} - \frac{x^2 - 7x}{x}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо область допустимих значень виразу, яким задано функцію (вираз, що міститься в правій частині рівності).	ОДЗ: $x \neq 0$
КРОК 2	Виконаємо дію віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками.	$\frac{2x^2 - 4x}{x} - \frac{x^2 - 7x}{x} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 7x}{x} = \frac{x^2 + 3x}{x} = \frac{x(x+3)}{x}$
КРОК 3	Запишемо задану функцію, використовуючи отриманий дріб, і скоротимо дріб.	$y = \frac{x(x+3)}{x}$; $y = x+3$
КРОК 4	Побудуємо графік функції $y = x+3$. Вилучимо на графіку точку, абсциса якої дорівнює нулю, оскільки ОДЗ $x \neq 0$. Отримаємо шуканий графік.	

 ТРЕНУЄМОСЯ

3 Побудуйте графіки функцій:

$$1) y = \frac{x^2 - x}{x};$$

$$5) y = \frac{6}{x-2} + \frac{3x}{2-x};$$

$$2) y = \frac{x^2 + 2x}{x};$$

$$6) y = \frac{4x - x^2}{x} + 1;$$

$$3) y = \frac{3x}{x-1} - \frac{3}{x-1};$$

$$7) y = \frac{-2x - x^2}{x} + \frac{3x}{x};$$

$$4) y = \frac{8-x}{x+4} + \frac{3x}{4+x};$$

$$8) y = \frac{5x - x^2}{x} + \frac{x^2 - x}{x}.$$

 КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Коли будете графіки, пам'ятайте про ОДЗ.

 ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$a - b = -(b - a)$$

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Виконайте дії:

$$1) \frac{2a - 3m}{a - 5m} + \frac{m - 3a}{5m - a};$$

$$3) \frac{a}{(c-a)^2} - \frac{c}{(a-c)^2};$$

$$2) \frac{b-a+c}{a+b-c} - \frac{a-b}{c-a-b};$$

$$4) \frac{3}{(2c-1)^2} - \frac{6c}{(1-2c)^2}.$$

2 Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні m значення виразу $\frac{m}{5} + \frac{m+1}{5} + \frac{m+2}{5} + \frac{m+3}{5} + \frac{m+4}{5}$ буде цілим числом.

3 Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\frac{a^3+27a}{(a-3)^3} + \frac{9a^2+27}{(3-a)^3}$ не залежить від a і набуває лише додатних значень.

4 Виконайте додавання (віднімання) дробів та скоротіть отриманий вираз, якщо це можливо:

$$1) \frac{14}{4a+7} - \frac{5}{7+4a};$$

$$4) \frac{25}{y^2+5y} - \frac{y^2}{5y+y^2};$$

$$2) \frac{9a}{4-a} + \frac{10a-4}{a-4};$$

$$5) \frac{b^2+2b}{b-5} + \frac{12b-25}{5-b};$$

$$3) \frac{2mn}{14mn^2} - \frac{8mn}{14mn^2} + \frac{20mn}{14mn^2};$$

$$6) \frac{(m-n)^2}{m^2+n^2} + \frac{(m+n)^2}{n^2+m^2}.$$

5 Подайте дріб у вигляді суми або різниці кількох цілих чи дробових виразів, почленно поділивши чисельник на знаменник, якщо це можливо:

$$1) \frac{m-4n+k}{3a};$$

$$2) \frac{a^9-a^{10}+a^{11}}{a^{10}};$$

$$3) \frac{12x^2m-16xm^2}{x^2m^2}.$$

6 Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{2x^2-6x}{x} - 2x+1;$$

$$2) y = \frac{3-x}{x-5} - \frac{12-2x}{5-x}.$$

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

$$1) \text{ Якщо } a = \frac{3}{4}, \text{ то } \frac{1}{a} = -\frac{4}{3}.$$

$$2) \text{ Вираз } \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \text{ тотожно дорівнює виразу } \frac{3a}{3b}.$$

$$3) \text{ Якщо } \frac{m}{x+y} + \frac{m}{x+y} = 6, \text{ то } \frac{m}{x+y} = 3.$$

$$4) \text{ Значення виразу } \frac{x}{x-3} - \frac{3}{x-3} \text{ дорівнює } 1 \text{ при } x \neq 3.$$

$$5) \text{ Значення виразу } \frac{x^2+5}{x^2+1} - \frac{5+x^2}{x^2+1} \text{ дорівнює нулю.}$$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$\bullet (m-n)^3 = -(n-m)^3$$

$$\bullet (m-n)^2 = (n-m)^2$$

$$\bullet \frac{a}{b-a} + \frac{b}{a-b} = \frac{a}{b-a} - \frac{b}{b-a} = \\ = \frac{a-b}{b-a} = -1$$



ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Ознайомлювальну версію програми Advanced Grapher для побудови графіків можна знайти за посиланням <http://rutube.ru/video/8aad5c8012b503d315a4cc731c968f5a/>.



Михайло Васильович Остроградський (1801–1862) — видатний український математик, спеціаліст з аналітичної та небесної механіки, математичного аналізу і математичної фізики, гідромеханіки та балістики. Ще за життя сучасники визнали його генієм.



Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

1 $\frac{8}{m} + \frac{2}{m} =$

А	Б	В	Г
$\frac{10}{m}$	$\frac{10}{m^2}$	$\frac{10}{2m}$	$10m$

2 $\frac{14}{3x} - \frac{2}{3x} =$

А	Б	В	Г
$\frac{16}{3x}$	4	12	$\frac{4}{x}$

3 $\frac{5n+1}{n} =$

А	Б	В	Г
$\frac{5}{n} + \frac{1}{n}$	$5 + \frac{1}{n}$	6	5

4 Якщо $\frac{a}{x+y} = -4$, то $\frac{a}{x+y} + \frac{a}{x+y} =$

А	Б	В	Г
16	8	-8	0

5 У зоопарку тигр і леопард за t днів споживають a кг і b кг м'яса відповідно. Скільки кілограмів м'яса споживають за один день тигр і леопард разом?

А	Б	В	Г
$\frac{t}{a+b}$	$\frac{t}{ab}$	$\frac{ab}{t}$	$\frac{a+b}{t}$

6 До кожного з виразів (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз серед виразів (А–Г), якщо $b \neq 5$.

1	$\frac{b^2}{b-5} - \frac{25}{b-5}$	А	5
2	$\frac{b^2+25}{b-5} - \frac{10b}{b-5}$	Б	$b+5$
3	$\frac{b^2}{b-5} - \frac{5b}{b-5}$	В	$b-5$
		Г	b

7 Виконайте дії: $\frac{x^2+9}{(x+3)(x-1)} + \frac{6x}{(x+3)(x-1)}$.

8 Доведіть тотожність $\frac{k^2-4}{k+1} - \frac{2k-5}{k+1} + \frac{3k-k^2}{k+1} = 1$, якщо $k \neq -1$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Уперше термін «стартап» з'явився в США в 1939 р. Студенти Стенфордського університету Д. Паккард і В. Хьюлетт, створюючи свій невеликий проект, назвали цю справу стартапом (від англ. Start-up — стартувати, запускати). З часом цей стартап переріс у величезну й успішну компанію «Хьюлетт-Паккард».

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «СТАРТАП»

Засновники стартапу витратили $\frac{5}{n}$ коштів, виділених інвестором на першому етапі, на безпосереднє розроблення продукту, $\frac{2}{n}$ коштів — на вивчення ринку, $\frac{3}{n}$ коштів — на розроблення реклами, а 4000 грн — на розвиток бізнесу. Знайдіть n , якщо інвестор на першому етапі виділив 20 000 грн.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Виконайте дії:

1) $\frac{2}{a} + \frac{5}{a}$;

3) $\frac{y^2}{y+4} - \frac{16}{y+4}$;

2) $\frac{9+3x}{9-4x} - \frac{7x}{9-4x}$;

4) $\frac{x^2+25}{(x+y)(x-5)} - \frac{10x}{(x+y)(x-5)}$.

2 Подайте у вигляді суми цілого і дробового виразів дріб:

1) $\frac{b+1}{b}$, де $b \neq 0$;

3) $\frac{12m^3 - 4m^{10} + 8m^2}{4m^3}$, де $m \neq 0$;

2) $\frac{y^6 - 3y^2}{y^4}$, де $y \neq 0$;

4) $\frac{25n^{10} + 10n^5 - 5n}{5n^2}$, де $n \neq 0$.

3 Виконайте дії:

1) $\frac{6}{a-2} + \frac{5}{2-a}$;

5) $\frac{5x}{x-3y} + \frac{15y}{3y-x}$;

2) $\frac{8}{8-a} + \frac{a}{a-8}$;

6) $\frac{12k}{16k^2 - c^2} - \frac{3c}{c^2 - 16k^2}$.

3) $\frac{3}{(b-1)^2} + \frac{6}{(1-b)^2}$;

7) $\frac{m^2}{(m-2)^2} - \frac{4m-4}{(2-m)^2}$;

4) $\frac{y}{(y-5)^2} - \frac{5}{(5-y)^2}$;

8) $\frac{y^3 - 6y^2}{(y-2)^2} - \frac{8-12y}{(2-y)^2}$.

4 Сергій витратив $\frac{1}{k}$ грошей, зароблених за певний час, на купівлю джинсів, $\frac{1}{k}$ від половини зароблених грошей — на поповнення рахунку мобільного телефону, 90 грн — на квитки в кіно. Після цього в Сергія залишилося 160 грн. Знайдіть k , якщо Сергій заробив 1000 грн.

5 Побудуйте графіки функцій:

1) $y = \frac{4+x}{x-2} - \frac{3x}{x-2}$;

2) $y = \frac{6x+2x^2}{x} - \frac{2x^2+x}{x}$.

Див. приклад 1

Див. приклад 2

ПРИГАДАЙТЕ!

- $a - b = -(b - a)$
- $(a - b)^2 = (b - a)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$\frac{a}{b}$ від m дорівнює $\frac{a}{b} \cdot m$.

Див. приклад 3

“ Багато чого з математики не залишається в пам'яті, але коли зрозумієш її, тоді легко при нагоді згадати призабуте. ”

М. В. Остроградський

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Виконайте дії:

1) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$;

3) $\frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{7}{2 \cdot 5}$;

5) $\frac{10}{21} - \frac{4}{35}$;

2) $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$;

4) $\frac{5}{2 \cdot 9} - \frac{4}{5 \cdot 9}$;

6) $\frac{3}{28} + \frac{5}{42}$.

ВЧОРА



Ви навчилися додавати й віднімати раціональні дроби з однаковими знаменниками

СЬОГОДНІ



Ви дізнаєтеся, як додавати й віднімати раціональні дроби з різними знаменниками

ЗАВЖДИ



Зможете розрахувати загальний час майбутніх подорожей

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Чемпіонат Європи з футболу — найпрестижніша континентальна першість світу, що відбувається кожні 4 роки, починаючи від 1960 р. Останній відбувся в 2012 р. в Україні та Польщі. Гасло чемпіонату: «Творимо історію разом».

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Для занять фізкультурою спонсори закупили для школи футбольні та баскетбольні м'ячі. За p баскетбольних м'ячів заплатили M грн, а за k футбольних м'ячів — N грн. На скільки футбольний м'яч дорожчий за баскетбольний?

Розв'язання

Ціна одного футбольного м'яча становить $\frac{N}{k}$, баскетбольного — $\frac{M}{p}$. Щоб знайти різницю, слід від ціни футбольного м'яча (дорожчого) відняти ціну баскетбольного (дешевшого). Таким чином, слід знайти значення виразу $\frac{N}{k} - \frac{M}{p}$.

Ми отримали дроби з різними знаменниками. Отже, виникає запитання: як додавати або віднімати дроби, що мають різні знаменники?

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Ви вже знаєте, як додаються та віднімаються звичайні дроби з різними знаменниками. Пригадаємо:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{ad \pm bc}{cd},$$

де a, b, c, d — деякі числа, причому $c \neq 0, d \neq 0$. Наприклад:

$$\frac{3}{14} + \frac{5}{21} = \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{7 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{19}{42}.$$

Аналогічно додаються й віднімаються раціональні дроби з різними знаменниками.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- раціональний дріб
- область допустимих значень раціонального дроби
- додавання раціональних дробів
- віднімання раціональних дробів
- скорочення дробів

Щоб додати (відняти) раціональні дроби з різними знаменниками, необхідно звести їх до спільного знаменника та виконати дії за алгоритмом додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.

Найважливішим під час додавання та віднімання дробів є знаходження спільного знаменника.

Алгоритм знаходження спільного знаменника дробів

1. Розкладіть на множники кожний знаменник.
2. Знайдіть найменше спільне кратне числових коефіцієнтів, що містяться в розкладах на множники.
3. Утворіть добуток, що міститиме числовий коефіцієнт (див. п. 2) та всі множники-вирази, що містяться в розкладі на множники знаменників. Множники, які повторюються, слід брати з найбільшим показником степеня. Отриманий добуток є спільним знаменником дробів.

Наведемо кілька прикладів знаходження спільних знаменників дробів.

	Приклад 1	Приклад 2	Приклад 3	Приклад 4
Дроби	$\frac{1}{6xy^3}, \frac{5}{12xy^3}$	$\frac{9}{m^6n^4}, \frac{7}{m^8n^2}$	$\frac{4}{a-m}, \frac{3}{a+m}$	$\frac{3}{(m+n)^2}, \frac{3}{(m-n)(m+n)}$
Спільний знаменник дробів	$12xy^3$	m^8n^4	$(a-m)(a+m)$	$(m+n)^2(m-n)$

Алгоритм додавання (віднімання) дробів з різними знаменниками

1. Розкладіть на множники кожний із знаменників дробів.
2. Знайдіть ОДЗ виразу.
3. Знайдіть спільний знаменник даних дробів.
4. Визначте доповняльні множники до чисельника кожного з дробів (це множники, що містяться в спільному знаменнику та відсутні в даному знаменнику).
5. Помножте чисельники на відповідні доповняльні множники.
6. Запишіть у новому дробі: у чисельнику — відповідну суму або різницю отриманих добутоків, а в знаменнику — спільний знаменник даних дробів.
7. Розкрийте дужки, зведіть подібні доданки, спростіть вираз у чисельнику та скоротіть отриманий дріб, якщо можливо.
8. Запишіть відповідь, урахувавши ОДЗ.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!



$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{D} = \frac{AD \pm BC}{CD},$$

де A, B, C, D — многочлени,
 $C \neq 0, D \neq 0$

АЛГОРИТМ



ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Добуток знаменників двох дробів є їх спільним знаменником. Проте такий знаменник не завжди є найбільш зручним спільним знаменником.

АЛГОРИТМ



 ПРИКЛАД 1

Виконаємо дії у виразі $\frac{2}{9x} + \frac{5}{6x}$, визначивши ОДЗ.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо ОДЗ виразу.	ОДЗ: $x \neq 0$
КРОК 2	Розкладемо знаменник кожного з дробів на множники.	$9x = 3 \cdot 3 \cdot x$; $6x = 3 \cdot 2 \cdot x$
КРОК 3	Запишемо дроби з урахуванням отриманих розкладів.	$\frac{2}{3 \cdot 3 \cdot x} + \frac{5}{3 \cdot 2 \cdot x}$
КРОК 4	Визначимо найменше спільне кратне знаменників, яке й буде спільним знаменником заданих дробів.	$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x$
КРОК 5	Визначимо доповняльні множники, розділивши спільний знаменник на знаменник кожного з дробів.	$\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot x} + \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot x}$
КРОК 6	Запишемо в знаменниках дробів спільний знаменник, помножимо чисельники на відповідні доповняльні множники та виконаємо додавання в отриманому чисельнику.	$\frac{2 \cdot 2}{3^2 \cdot 2 \cdot x} + \frac{5 \cdot 3}{3^2 \cdot 2 \cdot x} = \frac{2 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{3^2 \cdot 2 \cdot x}$
КРОК 7	Виконаємо дії в чисельнику та знаменнику, переконаємося, що отриманий дріб є нескоротним.	$\frac{4 + 15}{9 \cdot 2 \cdot x} = \frac{19}{18x}$

Відповідь: $\frac{19}{18x}$ при $x \neq 0$.

 ТРЕНУЄМОСЯ

1 Виконайте дії:

1) $\frac{5a}{2} + \frac{a}{4}$;

4) $\frac{2}{y} + \frac{6}{5y}$;

7) $\frac{a}{3x^4} - \frac{b}{6x^2}$;

2) $\frac{x}{3} - \frac{x}{6}$;

5) $\frac{3}{x} + \frac{y}{x^2}$;

8) $\frac{3x}{10a^2} + \frac{y}{5a^6}$.

3) $\frac{3}{b} - \frac{1}{2b}$;

6) $\frac{4}{a^3} - \frac{m}{a}$;

 ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

ОДЗ початкового раціонального виразу не завжди збігається з ОДЗ отриманого спрощеного виразу. Проте саме початковий вираз визначає область допустимих значень, оскільки скорочувати дріб можна лише на вираз, відмінний від нуля.

 ПРИКЛАД 2

Спростимо вираз, виконавши дії з раціональними дробами:

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} - \frac{16}{x^2-4}$$

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знаменники перших двох дробів не можуть бути розкладені на множники. Розкладемо на множники знаменник третього дробу.	$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
КРОК 2	Знайдемо ОДЗ виразу (зауважимо, що в третьому знаменнику кожний із множників має бути відмінним від нуля).	$x \neq \pm 2$
КРОК 3	Знайдемо спільний знаменник трьох дробів.	$(x-2)(x+2)$
КРОК 4	Знайдемо доповняльні множники до кожного дробу.	$\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} - \frac{16}{(x-2)(x+2)}$
КРОК 5	Запишемо в знаменнику дробу спільний знаменник, помножимо чисельники на відповідні доповняльні множники та запишемо в чисельнику отриманий вираз.	$\frac{(x+2)^2 - (x-2)^2 - 16}{(x-2)(x+2)}$
КРОК 6	Перетворимо вираз у чисельнику.	$\frac{x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 4x + 4) - 16}{(x-2)(x+2)} = \frac{8x - 16}{(x-2)(x+2)}$
КРОК 7	Розкладемо чисельник на множники та скоротимо отриманий дріб.	$\frac{8x - 16}{(x-2)(x+2)} = \frac{8(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{8}{x+2}$

Відповідь: $\frac{8}{x+2}$.

 ТРЕНУЄМОСЯ

2 Виконайте дії:

$$1) \frac{3}{x} + \frac{3}{x(x-1)};$$

$$2) \frac{2}{x} - \frac{4}{x(x+2)};$$

$$3) \frac{3}{(a+4)(a-3)} + \frac{1}{a+4};$$

$$4) \frac{1}{a+6} - \frac{a}{(a-1)(a+6)};$$

$$5) \frac{a+5}{a-5} - \frac{20a}{(a-5)(a+5)};$$

$$6) \frac{y-6}{y+6} + \frac{24y}{(y-6)(y+6)};$$

$$7) \frac{m+3}{m-3} - \frac{m-3}{m+3} - \frac{36}{m^2-9};$$

$$8) \frac{2}{5x-y} + \frac{4y}{(5x-y)(5x+y)} + \frac{2}{5x+y}.$$



ПАМ'ЯТАЙТЕ!

Усі перетворення раціональних дробів виконують на їх ОДЗ. Знаходимо ОДЗ виразу й записуємо її у відповідь, лише якщо це вимагається в умові завдання.

 ПРИКЛАД 3

Подайте у вигляді дроби вираз $2 - \frac{18-m}{9-m}$ при $m \neq 9$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Подамо число 2 у вигляді дроби із знаменником 1 та зведемо два отримані дроби до спільного знаменника $(9-m)$.	$2 - \frac{18-m}{9-m} = \frac{2^{9-m}}{1} - \frac{18-m}{9-m} =$ $= \frac{2(9-m) - (18-m)}{9-m}$
КРОК 2	Розкриємо в чисельнику дужки та зведемо подібні доданки.	$\frac{2(9-m) - (18-m)}{9-m} = \frac{18-2m-18+m}{9-m} = \frac{-m}{9-m}$
КРОК 3	Розділимо чисельник і знаменник одержаного дроби на (-1) і скористаємося властивістю $-(a-b) = b-a$.	$\frac{-m}{9-m} = \frac{m}{m-9}$

Відповідь: $\frac{m}{m-9}$.

 ТРЕНУЄМОСЯ

3) Подайте у вигляді дроби вираз:

1) $\frac{7}{t-1} + 7$; 3) $\frac{r^2}{r+1} - r$; 5) $9k - \frac{9k^2 + 8kn}{k+n}$;

2) $6 - \frac{18}{x+3}$; 4) $c - \frac{c^2}{c-13}$; 6) $\frac{7ab - 8a^2}{b-a} - 7a$;

7) $\frac{c^2 + 4d^2}{c-2d} + 3d + \frac{4cd}{2d-c} - c$;

8) $\frac{49a^2 + n^2}{n-7a} - 2n + \frac{14an}{7a-n} + 7a$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$a = \frac{a}{1}$$

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1) Подайте у вигляді дроби суму або різницю двох виразів:

1) $\frac{7}{12x} - \frac{1}{18x}$; 4) $\frac{5}{x-4} - \frac{5}{x+4}$;

2) $\frac{5x}{3a} - \frac{7}{9b}$; 5) $\frac{2a}{1+6a} + \frac{2a}{6a-1}$;

3) $\frac{3}{m+n} + \frac{3}{m-n}$; 6) $\frac{3y}{2y-1} - \frac{3y}{2y+1}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$a = \frac{a}{1}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

2 Виконайте дії з раціональними дробами:

$$\begin{array}{lll} 1) m + \frac{1}{2}; & 3) 3a + \frac{1}{2b}; & 5) a + \frac{3a}{a-3}; \\ 2) 4 - \frac{2}{m}; & 4) 7a - \frac{5}{y}; & 6) 2m - \frac{3m}{m-2}. \end{array}$$

3 Виконайте дії з раціональними дробами:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{y^3-1}{y^4} + \frac{y-2}{y^5}; & 4) \frac{5}{3(m-n)} - \frac{3}{4(m+n)}; \\ 2) \frac{a+b}{b} - \frac{b-a}{a} - \frac{a^2-b^2}{ab}; & 5) \frac{2-a}{a+2} + \frac{a+2}{a-2} + \frac{16}{4-a^2}; \\ 3) \frac{x+y}{y} + \frac{y}{x-y}; & 6) \frac{36}{a^2-9} - \frac{a-3}{a+3} - \frac{a+3}{3-a}. \end{array}$$

4 Виконайте дії з раціональними дробами:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{x+2}; & 4) \frac{y}{(y-2)^2} + \frac{2}{2-y}; \\ 2) \frac{m}{(m+2)^2} - \frac{2}{m+2}; & 5) \frac{1}{t^2-6t+9} + \frac{1}{t^2-9}; \\ 3) \frac{a}{a^2-4a+4} - \frac{2}{a-2}; & 6) \frac{1}{m^2-10m+25} - \frac{1}{25-m^2}. \end{array}$$

5 **Задача «Експерсія».** Для учнів 8-го класу планується поїздка на експерсію. До місця призначення необхідно спочатку проїхати на автобусі 40 км, а потім їхати потягом. Загальна відстань до місця призначення становить 140 км. Середня швидкість руху потяга на 30 км/год більша за середню швидкість руху автобуса.

- 1) Запишіть вираз, за яким можна знайти загальний час поїздки, якщо швидкість автобуса x км/год.
- 2) Обчисліть загальний час поїздки, якщо швидкість автобуса 70 км/год.
- 3) Ураховуючи отриманий результат, визначте, чи встигне клас доїхати до місця призначення до початку експерсії, якщо вона розпочинається о 14:00, а в поїздку клас вирушить о 12:00.

6 Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{7x+28}{(-x-4)^2} - \frac{4}{x+4}; & 3) \frac{a-1}{ab-a^2} - \frac{1-b}{ab-b^2}; \\ 2) \frac{14a}{9-a^2} + \frac{7}{a-3}; & 4) \frac{12x^2-20x+16}{9x^2-16} + \frac{x}{4-3x}. \end{array}$$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Спробуйте за 20 секунд без допомоги калькулятора визначити, яке з чисел є більшим — перше чи друге:

$$1) \frac{420}{978} - \frac{211}{977}; \quad 2) \frac{209}{977}.$$

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ



Туристична галузь — одна з найбільш перспективних. Досвідчений менеджер з туризму вільно орієнтується у величезних обсягах інформації та блискавично комбінує різноманітні варіанти відпочинку. Дізнатися більше про професію ви можете за посиланням <http://poradumo.com.ua>

ДОСЛІДЖУЄМО

ПРИГАДАЙТЕ!

- $(-a-b)^2 = (a+b)^2$
- $-\frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a-b} = \frac{1}{b-a}$
- $-\frac{x-y}{a-b} = \frac{y-x}{a-b} = \frac{x-y}{b-a}$



Стів Джобс (Steve Jobs) — один із засновників корпорації Apple та відомої в усьому світі кіностудії Pixar. Людина, яка змінила світ, керуючи розробками iMac, iTunes, iPod, iPhone та iPad, а також розвитком Apple Store, iTunes Store, App Store та iBookstore.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

- Сума виразів $\frac{m}{x-a}$ і $\frac{m}{a-x}$ дорівнює нулю при $x \neq a$.
- Сума виразів $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$ і $\frac{1}{a^3}$ дорівнює $\frac{3}{a^3}$ при $a \neq 0$.
- Якщо $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$, то $\frac{a^2+b^2}{ab} = 1$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$.
- Значення виразу $\frac{y^2+3}{y^2-6y+9}$ додатне при $y \neq 3$.
- Якщо 1 кг апельсинів коштує x грн, а 1 кг лимонів — y грн, то n кг апельсинів і m кг лимонів разом коштують $(nx+my)$ грн.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Тріатлон — олімпійський вид спорту, що складається з трьох різних спортивних змагань, які слідують одне за одним. Це плавання, велоперегони та крос. У 2015 р. найсильніший паратріатлоніст України Василь Закревський переміг на чемпіонаті Європи та етапі Кубка світу, а також здобув срібну нагороду чемпіонату світу.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$t = \frac{s}{v}, t = t_1 + t_2 + t_3$$

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ТРИАТЛОН»

Змагання з тріатлону складаються з плавання, велоперегонів і кросу. У таблиці наведено відстані, які один із тріатлоністів подолав на кожному етапі, та середні швидкості його руху на відповідних етапах.

Етап	Відстань s , км	Швидкість v , км/год
Плавання	0,5	v
Велоперегони	22	$16v$
Крос	6	$v+6$

- Запишіть вираз, за яким можна визначити загальний час t , витрачений на подолання всіх етапів, якщо t_1 — час, витрачений тріатлоністом на плавання, t_2 — на велоперегони, t_3 — на крос.
- Обчисліть загальний час t , якщо середня швидкість, з якою плив тріатлоніст, становила 2 км/год.
- Ураховуючи отримані результати, визначте, чи потрапив тріатлоніст у призери, якщо учасник, який посів третє місце, подолав усі етапи змагання за 2 год.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

1 $\frac{1}{m} + \frac{1}{3m} =$

А

$\frac{4}{3m}$

Б

$\frac{1}{4m}$

В

$\frac{2}{4m}$

Г

$\frac{2}{3m}$

2 $\frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} =$

А

$\frac{2-y}{y^2}$

Б

$\frac{1}{y^2}$

В

$\frac{2y-1}{y^2}$

Г

$\frac{1}{y}$

3 $\frac{4}{a-b} + \frac{4}{b-a} =$

А

$\frac{8}{a-b}$

Б

0

В

1

Г

$\frac{8}{b-a}$

4 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$

А

$-\frac{1}{n(n+1)}$

Б

-1

В

1

Г

$\frac{1}{n(n+1)}$

- 5 Перша митниця пропускає в середньому m туристів кожні x год, а друга митниця — n туристів кожні y год. Скільки в середньому туристів перетинають кордон через ці дві митниці щогодини?

А

$\frac{x+y}{m+n}$

Б

$\frac{m+n}{x+y}$

В

$\frac{m+n}{x+y}$

Г

$\frac{x+y}{m+n}$

- 6 До кожного з виразів (1–3) доберіть тотожно рівний йому серед виразів (А–Г), якщо $a \neq 0$, $a \neq \pm 3$.

1 $\frac{1}{a} + \frac{3}{a(a-3)}$

А $\frac{1}{a(a^2-9)}$

2 $\frac{1}{a-3} - \frac{6}{a^2-9}$

Б $\frac{1}{a^2-9}$

3 $\frac{a+3}{12a(a-3)} - \frac{a-3}{12a(a+3)}$

В $\frac{1}{a-3}$

Г $\frac{1}{a+3}$

- 7 Виконайте дії: $\frac{2}{m-5n} - \frac{20n}{m^2-25n^2} + \frac{2}{m+5n}$.

- 8 Доведіть тотожність $\frac{18x^2-12x}{9x^2-12x+4} - \frac{4}{3x-2} = 2$, якщо $x \neq \frac{2}{3}$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

- 1 Виконайте дії:

1) $\frac{3b}{5} - \frac{b}{10}$; 3) $\frac{4}{a} - \frac{1}{3a}$; 5) $\frac{6}{n} + \frac{x}{n^2}$; 7) $\frac{m}{4y^6} - \frac{n}{8y^3}$;

2) $\frac{y}{6} + \frac{5y}{2}$; 4) $\frac{1}{x} + \frac{7}{4x}$; 6) $\frac{9}{b^3} - \frac{n}{b^2}$; 8) $\frac{5a}{12x^3} + \frac{b}{2x^5}$.

- 2 Знайдіть найменший спільний знаменник дробів:

1) $\frac{x+y}{x^3}$; $\frac{3x-2y}{4x}$; $\frac{y^4}{x-y}$; 2) $\frac{a}{a-b}$; $\frac{b}{(b-a)^2}$; $\frac{ab}{a+b}$; $\frac{4}{5a+5b}$.

Див. приклад 1





Див. приклад 2



Див. приклад 3

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Рафтинг — швидкісний сплав гірською річкою через пороги на надувному човні (рафті), плоті або байдарці. Рафтинг в Україні стає все більш популярним.

“ Будь чесним із самим собою і з людьми, завжди роби все вчасно, ніколи не здавайся, іди до своїх цілей, навіть якщо все погано. ”

Стів Джобс

3 Виконайте дії, визначивши ОДЗ виразу:

1) $\frac{3}{a} + \frac{6}{a(a-2)}$;

5) $\frac{x+3}{x-3} - \frac{12x}{(x-3)(x+3)}$;

2) $\frac{4}{a} - \frac{12}{a(a+3)}$;

6) $\frac{b-4}{b+4} + \frac{16b}{(b-4)(b+4)}$;

3) $\frac{2}{(b+5)(b-2)} + \frac{1}{b+5}$;

7) $\frac{n+4}{n-4} - \frac{n-4}{n+4} + \frac{64}{n^2-16}$;

4) $\frac{b}{(b-3)(b+1)} - \frac{1}{b+1}$;

8) $\frac{3}{a-4b} - \frac{24b}{a^2-16b^2} + \frac{3}{a+4b}$.

4 Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{3}{y-1} + 3$;

5) $5x - \frac{4x^2+5xy}{x+y}$;

2) $2 + \frac{4}{x-2}$;

6) $\frac{3mn+4n^2}{m+n} - 3n$;

3) $\frac{n^2}{n+1} - n$;

7) $\frac{a^2+25b^2}{a-5b} + 6b + \frac{10ab}{5b-a} - a$;

4) $m - \frac{m^2}{m+2}$;

8) $\frac{16x^2+y^2}{4x-y} + y + \frac{8xy}{y-4x} - 3x$.

5 Туристи вирішили поплисти по річці на байдарках від бази відпочинку до найближчого населеного пункту. Відстань, яку вони мали подолати в обидва боки, становить 10 км. Перші 5 км туристи пливли проти течії зі швидкістю $(v-3)$ км/год, а назад — за течією річки зі швидкістю $(v+3)$ км/год. Запишіть вираз, за яким можна визначити загальний час, витрачений туристами на всю подорож.

6 Спростіть вираз:

1) $\frac{6a+30}{(-a-5)^2} - \frac{2}{a+5}$;

3) $\frac{5+x}{xy-x^2} + \frac{5+y}{xy-y^2}$;

2) $\frac{6n}{n^2-64} + \frac{3}{8-n}$;

4) $\frac{3a}{5-4a} + \frac{28a^2+55a+25}{16a^2-25}$.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

1 Виконайте дії:

1) $\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{7}$;

3) $\frac{24}{25} \cdot \frac{15}{48}$;

5) $\frac{12}{5} : \frac{24}{5}$;

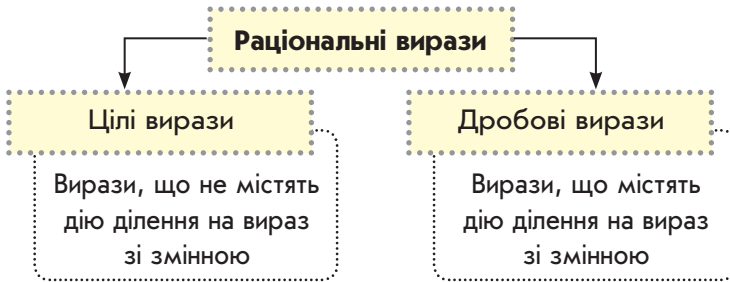
2) $\frac{6}{11} \cdot \frac{22}{3}$;

4) $\frac{1}{13} : \frac{4}{13}$;

6) $\frac{40}{63} : \frac{20}{9}$.

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 1–4

1 Ви дізналися, що таке раціональні вирази, область допустимих значень виразу.



Область допустимих значень (ОДЗ) виразу з однією змінною — усі значення змінної, при яких цей вираз має зміст. Область допустимих значень називають також *областю визначення виразу*.

- Дріб має зміст, коли знаменник відмінний від нуля.
- Коли говорять, що **вираз має зміст**, це означає, що можна виконати всі математичні дії, які містить даний раціональний вираз.

Алгоритм знаходження ОДЗ виразу

1. Прирівняти знаменники дробів, що входять у вираз, до нуля.
2. Знайти розв'язки отриманих рівнянь.
3. Вилучити з ОДЗ отримані розв'язки.
4. Записати відповідь.

2 Ви познайомилися з основною властивістю дробу, навчилися скорочувати дробі.

Тотожно рівні вирази — вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких допустимих значеннях змінних.

Тотожність — рівність, яка виконується при будь-яких допустимих значеннях змінних.

Основна властивість дробу

Чисельник і знаменник раціонального дробу можна помножити (або поділити) на один і той самий множник, який тотожно не дорівнює нулю, при цьому значення раціонального дробу не зміниться:

$$\frac{M}{P} = \frac{M \cdot N}{P \cdot N},$$
 де M, P, N — многочлени, причому P і N тотожно не дорівнюють нулю.

Алгоритм скорочення дробів

1. Розкласти на множники чисельник і знаменник дробу.
2. Знайти область допустимих значень раціонального дробу.
3. Визначити спільний множник чисельника та знаменника дробу.
4. Скоротити дріб, поділивши чисельник і знаменник дробу на їх спільний множник.

3 Ви навчилися зводити дріб до нового знаменника, додавати й віднімати раціональні дроби.

Алгоритм зведення дроби до нового (відомого) знаменника

1. Розкласти новий знаменник на множники.
2. Знайти доповняльний множник, поділивши новий знаменник на знаменник початкового дроби.
3. Помножити чисельник і знаменник даного дроби на знайдений доповняльний множник.
4. Виконати відповідні дії в чисельнику та знаменнику отриманого дроби.
5. Записати отриманий дріб.

Щоб додати (відняти) раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба додати (відняти) їх чисельники, а знаменник залишити без змін:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \quad c \neq 0.$$

І навпаки: $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}, \quad c \neq 0.$

Щоб додати (відняти) раціональні дроби з різними знаменниками, треба звести їх до спільного знаменника та виконати дії за алгоритмом додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками:

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{D} = \frac{AD \pm BC}{CD},$$

де A, B, C, D — многочлени, $C \neq 0, D \neq 0$.

Алгоритм додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками

1. Записати дію додавання (віднімання) дробів із використанням спільної риски, залишивши знаменник без змін.
2. В отриманому чисельнику виконати відповідні дії додавання (віднімання). Розкрити дужки та звести подібні доданки (якщо потрібно).
3. Скоротити, якщо можливо, отриманий дріб.

Алгоритм додавання (віднімання) дробів з різними знаменниками

1. Розкласти на множники кожний знаменник.
2. Знайти ОДЗ виразу.
3. Знайти спільний знаменник даних дробів.
4. Знайти доповняльні множники для кожного з дробів.
5. Помножити чисельники на відповідні доповняльні множники, записати відповідну суму або різницю отриманих добутоків у новому чисельнику.
6. Розкрити дужки, звести подібні доданки (у разі потреби) та спростити вираз у чисельнику.
7. Скоротити, якщо можливо, отриманий дріб.
8. Записати відповідь, ураховуючи ОДЗ.



- 1 Знайдіть допустимі значення змінної, що входить до виразу $\frac{4x}{x+9}$.

А	Б	В	Г
Усі значення, крім $x=0$	Усі значення, крім $x=4$	Усі значення, крім $x=-9$	Усі значення, крім $x=9$

- 2 У ставку m карасів та n щук. Відомо, що кількість карасів більша за кількість щук. Укажіть дріб, якому може дорівнювати значення виразу $\frac{n}{m}$.

А	Б	В	Г
$\frac{102}{79}$	$\frac{231}{229}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{23}{91}$

- 3 У будинку a двокімнатних і b однокімнатних квартир ($a > b$). У скільки разів двокімнатних квартир більше за однокімнатних?

А	Б	В	Г
$a-b$	$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b}$	$b-a$

- 4 Скоротіть дріб $\frac{y^2-6y+9}{2y-6}$.

А	Б	В	Г
$\frac{2}{y-3}$	$\frac{y-3}{2}$	$\frac{y+3}{2}$	$\frac{2}{y+3}$

- 5 Виконайте віднімання: $\frac{6k}{3k-5} - \frac{10}{3k-5}$.

А	Б	В	Г
2	3	$\frac{2}{3k-5}$	$\frac{3}{3k-5}$

- 6 Виконайте дії: $\frac{1}{x-5} - \frac{10}{x^2-25}$.

А	Б	В	Г
$-\frac{1}{x+5}$	$-\frac{1}{x-5}$	$\frac{1}{x-5}$	$\frac{1}{x+5}$

- 7 Доведіть тотожність $\frac{(4a+b)^2}{16a^2+b^2} + \frac{(4a-b)^2}{b^2+16a^2} = 2$.

- 8 Подайте вираз $\frac{2x^3+6x^8-14x}{2x^2}$, де $x \neq 0$, у вигляді суми та різниці нескоротних дробів.

- 9 Спростіть вираз $\frac{10c+6}{c^2-9} - \frac{6c+19}{9-c^2} + \frac{11-4c}{c^2-9}$.

- 10 Спростіть вираз $\frac{n+3}{n-1} - \frac{n^2+n-2}{n^2-2n+1}$. Знайдіть його значення при $n=1,1$.

- Бонусне завдання. Відомо, що $\frac{x}{y} = 10$.
Знайдіть значення виразу $\frac{x^2-15xy+9y^2}{xy}$.

ВЧОРА



Ви множили й підносили до степеня звичайні дроби

СЬОГОДНІ



Ви навчитеся множити й підносити до степеня раціональні дроби

ЗАВЖДИ



Зможете розв'язувати задачі на відсоткові розрахунки

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Валерій Васильович Лобановський — видатний радянський та український футболіст і тренер. Багаторічний наставник футбольної команди «Динамо» (Київ), яка під його керівництвом двічі виграла турнір Кубок володарів кубків. На тренуваннях відпрацьовував удари типу «сухий лист», використовуючи фізичний ефект Магнуса та власні математичні розрахунки.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- множення раціональних дробів
- піднесення дробу до степеня
- ділення раціональних дробів
- скорочення дробів

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

У класі навчаються k учнів, причому $\frac{a}{n}$ учнів класу становлять хлопці. Відомо, що 30 % усіх хлопців займаються футболом. Запишіть вираз, за яким можна визначити кількість учнів, які займаються футболом.

Розв'язання

За правилом знаходження дробу від числа визначимо кількість хлопців: $\frac{a}{n} \cdot k$. Тоді 30 % від числа $\frac{a}{n} \cdot k$ можна знайти за допомогою виразу $\frac{30}{100} \cdot \frac{a}{n} \cdot k = \frac{3}{10} \cdot \frac{a}{n} \cdot k$.

Щоб спростити отриманий вираз, необхідно виконати множення раціональних дробів.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

МНОЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Ви вже знаєте, що звичайні дроби множаться за правилом:

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}, \text{ де } a, b, c, d \text{ — деякі числа, } c \neq 0, d \neq 0.$$

Після запису чисельника і знаменника нового дробу у вигляді добутку слід скоротити дріб, якщо це можливо.

Наприклад:

$$\frac{4}{15} \cdot \frac{20}{8} = \frac{4 \cdot 20}{15 \cdot 8} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3}; \quad \frac{3}{14} \cdot \frac{28}{21} = \frac{3 \cdot 28}{14 \cdot 21} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{7}}{\cancel{2} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{3} \cdot 7} = \frac{2}{7}.$$

За цим правилом можна перемножити кілька дробів:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n}.$$

Так само множаться й раціональні дроби.

Правило 1

Щоб помножити два раціональні дроби, слід перемножити окремо їх чисельники та окремо знаменники і записати перший добуток у чисельник, а другий — у знаменник нового дробу:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D},$$

де B і D — многочлени, причому $B \neq 0$, $D \neq 0$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D},$$

$$B \neq 0, D \neq 0$$

ПРИКЛАД 1

Виконаємо множення: $\frac{5b^2}{2m^3} \cdot \frac{8m^2}{15b^5}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що дроби існують, якщо $b \neq 0$, $m \neq 0$.	ОДЗ: $\begin{cases} b \neq 0, \\ m \neq 0 \end{cases}$
КРОК 2	Запишемо дані дроби, використовуючи спільну риску: у чисельнику нового дробу зазначимо добуток чисельників, а в знаменнику — добуток знаменників заданих дробів.	$\frac{5b^2 \cdot 8m^2}{2m^3 \cdot 15b^5}$
КРОК 3	Розкладемо на множники вирази в чисельнику та знаменнику так, щоб отримати спільні множники.	$\frac{5b^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot m^2}{2m \cdot m^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot b^2 \cdot b^3}$
КРОК 4	Скоротимо отриманий дріб на вираз $(10b^2m)$.	$\frac{4 \cdot (10b^2m^2)}{3 \cdot mb^3 \cdot (10b^2m^2)} = \frac{4}{3b^3m}$

Відповідь: $\frac{4}{3b^3m}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Виконайте множення:

1) $\frac{3}{a} \cdot \frac{b}{6}$;

4) $\frac{12}{y} \cdot \frac{y^3}{6}$;

7) $\frac{49n^3}{15m^5} \cdot \frac{30m^9}{7n^6}$;

2) $\frac{c}{5} \cdot \frac{2}{c}$;

5) $\frac{9a^5}{14c} \cdot \frac{7c}{3a^3}$;

8) $\frac{24a^{10}}{25x^8} \cdot \frac{5x^6}{8a^7}$.

3) $\frac{x^2}{10} \cdot \frac{2}{x}$;

6) $\frac{15x}{2y^3} \cdot \frac{6y^5}{5x}$;

 ПРИКЛАД 2

Виконаємо дії та спростимо вираз $\frac{4m-4n}{m^2-n^2} \cdot \frac{m^2+mn}{3}$ при $m \neq \pm n$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що кожний із дробів існує при $m \neq \pm n$.	ОДЗ: $m \neq \pm n$
КРОК 2	Розкладемо чисельник першого дроби на множники (винесемо спільний множник за дужки).	$4m - 4n = 4(m - n)$
КРОК 3	Розкладемо знаменник першого дроби на множники (за формулою різниці квадратів).	$m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$
КРОК 4	Розкладемо чисельник другого дроби на множники (винесемо спільний множник за дужки).	$m^2 + mn = m(m + n)$
КРОК 5	Запишемо дріб, що дорівнює добутку двох даних дробів, використовуючи перетворені вирази.	$\frac{4(m - n) \cdot m(m + n)}{(m - n)(m + n) \cdot 3}$
КРОК 6	Скоротимо отриманий дріб на вираз $(m - n)(m + n)$.	$\frac{4m}{3}$

Відповідь: $\frac{4m}{3}$.

 ТРЕНУЄМОСЯ

2 Виконайте дії:

1) $\frac{x-6}{2} \cdot \frac{4}{x-6}$;

5) $\frac{25-x^2}{8y} \cdot \frac{4}{x-5}$;

2) $\frac{3}{5+y} \cdot \frac{5+y}{6}$;

6) $\frac{12a}{49-b^2} \cdot \frac{b-7}{4}$;

3) $\frac{a-b}{t^3} \cdot \frac{4t^3}{a-b}$;

7) $\frac{2k-2t}{k^2-t^2} \cdot \frac{k^2+kt}{6}$ при $k \neq \pm t$;

4) $\frac{x^5}{m+n} \cdot \frac{m+n}{6x^5}$;

8) $\frac{3x-3y}{y^2-x^2} \cdot \frac{x^2+xy}{24}$ при $y \neq \pm x$.

 ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Виконуючи дії та скорочуючи дроби, пам'ятайте про ОДЗ.

ПІДНЕСЕННЯ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ ДО СТЕПЕНЯ

Пригадайте, як виконується піднесення до степеня звичайного дроби:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_n = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^n}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_n} = \frac{a^n}{b^n}, \text{ причому } b \neq 0.$$

Правило 2

Щоб піднести дріб до степеня, слід піднести до цього степеня окремо чисельник та окремо знаменник і записати перший результат у чисельник, а другий — у знаменник нового дробу:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}, \text{ де } B \neq 0.$$

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!**СЛІД ЗНАТИ!**Якщо $n = 1$, маємо

$$\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}.$$

ПРИКЛАД 3

Подамо вираз $\left(-\frac{2x^2}{3a^3b}\right)^4$ у вигляді дробу.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо область допустимих значень заданого виразу.	ОДЗ: $a \neq 0, b \neq 0$
КРОК 2	Визначимо знак результату, враховуючи парний показник степеня.	Знак «+»
КРОК 3	Піднесемо до степеня окремо чисельник та окремо знаменник дробу.	$\left(-\frac{2x^2}{3a^3b}\right)^4 = \frac{2^4(x^2)^4}{3^4(a^3)^4b^4}$
КРОК 4	Піднесемо до степенів вирази в чисельнику та знаменнику, використовуючи властивості степенів.	$\frac{16x^8}{81a^{12}b^4}$

Відповідь: $\frac{16x^8}{81a^{12}b^4}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\left(-\frac{6x}{y}\right)^2$;

4) $\left(-\frac{a^4}{2b^2}\right)^5$;

7) $\left(-\frac{3a^3b^2}{2x^4y^{12}}\right)^5$;

2) $\left(-\frac{a}{3b}\right)^4$;

5) $\left(-\frac{5y^3}{7k^6m}\right)^2$;

8) $\left(-\frac{5c^6d^3}{4m^{11}n^8}\right)^3$.

3) $\left(-\frac{4m^2}{n^3}\right)^3$;

6) $\left(-\frac{3ab^7}{2n^5}\right)^4$;

ПРИГАДАЙТЕ!

- $(-1)^4 = 1$
- $(-1)^5 = -1$

 ПРИКЛАД 4

Виконаємо дії: $\left(\frac{m}{a^4}\right)^3 \cdot \frac{a^{15}}{(ma)^3}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що дріб існує при $a \neq 0$, $m \neq 0$.	ОДЗ: $\begin{cases} a \neq 0, \\ m \neq 0 \end{cases}$
КРОК 2	Піднесемо до степеня перший дріб і знаменник другого дробу (добуток $m \cdot a$).	$\left(\frac{m}{a^4}\right)^3 = \frac{m^3}{a^{12}}$; $(ma)^3 = m^3 a^3$
КРОК 3	Запишемо добуток перетворених дробів.	$\frac{m^3 \cdot a^{15}}{a^{12} \cdot m^3 a^3}$
КРОК 4	Виконаємо множення степенів з однаковою основою в знаменнику дробу.	$a^{12} \cdot a^3 = a^{15}$
КРОК 5	Скоротимо дріб на $m^3 a^{15}$.	$\frac{a^{15} m^3}{a^{15} m^3} = 1$

Відповідь: 1.

 ТРЕНУЄМОСЯ

4 Виконайте дії:

1) $\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2}$;

2) $\frac{1}{a^3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3$;

3) $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2 \cdot \frac{y}{x^4}$;

4) $\frac{a^9}{b} \cdot \left(\frac{b^2}{a^4}\right)^3$;

5) $\left(\frac{a}{b^3}\right)^4 \cdot \frac{b^{12}}{(ab)^4}$;

6) $\left(\frac{x^2}{y}\right)^2 \cdot \frac{(xy)^2}{x^6}$;

7) $\left(-\frac{2x^2}{yz^3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{y^2z}{2x^3}\right)^4$;

8) $\left(-\frac{3a^4}{b^3c}\right)^2 \cdot \left(-\frac{bc^2}{3a^3}\right)^5$.

ПРИГАДАЙТЕ!

• $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

• $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

ДІЛЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Пригадаємо, як виконується ділення звичайних дробів:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},$$

де a, b, c, d — числа, причому $b \neq 0$, $d \neq 0$, $c \neq 0$.

Правило 3

Щоб поділити один раціональний дріб на інший, слід перший дріб помножити на дріб, обернений до другого:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}, \text{ причому } B \neq 0, D \neq 0, C \neq 0.$$

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C},$$

$B \neq 0, D \neq 0, C \neq 0$

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

У разі ділення раціональних дробів чисельник дробу-дільника також має бути відмінним від нуля.

ПРИКЛАД 5

Виконаємо ділення дробів: $\frac{4m^3}{a} : \frac{8m}{a^2}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що не повинні дорівнювати нулю не тільки знаменники обох дробів, а також і чисельник другого дробу.	ОДЗ: $\begin{cases} a \neq 0, \\ m \neq 0 \end{cases}$
КРОК 2	Виконаємо ділення дробів за відповідним правилом, враховуючи, що оберненим до дробу-дільника є дріб $\frac{a^2}{8m}$.	$\frac{4m^3}{a} \cdot \frac{a^2}{8m}$
КРОК 3	Виконаємо множення дробів, виокремивши спільний множник чисельника та знаменника.	$\frac{4m^3 a^2}{a \cdot 8m} = \frac{4am \cdot am^2}{4am \cdot 2}$
КРОК 4	Скоротимо дріб на одночлен $4am$.	$\frac{am^2}{2}$

Відповідь: $\frac{am^2}{2}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

5 Виконайте ділення:

- 1) $\frac{x}{4} : \frac{a}{2}$; 3) $\frac{a^2}{b} : \frac{a}{b^4}$; 5) $\frac{6a^4}{x} : \frac{12a}{x^3}$; 7) $\frac{35x^2y^2}{6a^5} : \frac{14x^8y^3}{9a^4}$;
 2) $\frac{9}{y} : \frac{3}{b}$; 4) $\frac{x}{y^3} : \frac{x^4}{y^5}$; 6) $\frac{y}{9k^5} : \frac{y^6}{18k}$; 8) $\frac{4b^3}{15k^4m^5} : \frac{16b}{27k^3m^4}$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \text{ } b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0.$$

Дроби $\frac{c}{d}$ і $\frac{d}{c}$ є взаємно оберненими.

 ПРИКЛАД 6

Виконаємо дії: $\frac{(m-4)^3}{2m^3} : \frac{(4-m)^2}{20m}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що знаменники відмінні від нуля при $m \neq 0$; чисельник другого дробу (дільника) відмінний від нуля при $m \neq 4$.	ОДЗ: $\begin{cases} m \neq 0, \\ m \neq 4 \end{cases}$
КРОК 2	Виконаємо ділення дробів за відповідним правилом, помноживши перший дріб на дріб, обернений до другого.	$\frac{(m-4)^3 \cdot 20m}{2m^3 \cdot (4-m)^2}$
КРОК 3	Використаємо властивість $(4-m)^2 = (m-4)^2$ для того, щоб отримати однаковий множник у чисельнику та знаменнику дробу.	$\frac{(m-4)^3 \cdot 20m}{(m-4)^2 \cdot 2m^3} = \frac{(m-4)^2 (m-4) \cdot 2m \cdot 10}{(m-4)^2 \cdot 2m \cdot m^2}$
КРОК 4	Скоротимо одержаний дріб на вираз $2m \cdot (m-4)^2$.	$\frac{10(m-4)}{m^2}$

Відповідь: $\frac{10(m-4)}{m^2}$.

 ТРЕНУЄМОСЯ

 ПРИГАДАЙТЕ!

- $(a-b)^3 = -(b-a)^3$
- $(c-d)^2 = (d-c)^2$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

1. Задумайте число.
2. Відніміть від цього числа те число, що є меншим за нього на 2.
3. Помножте результат на 10.
4. Додайте до добутку 80.

Що ви отримали? Повторіть цей алгоритм кілька разів і поясніть результат.

6 Виконайте дії:

1) $\frac{a^3}{x-2} : \frac{a}{x-2}$;

2) $\frac{a+3}{x^2} : \frac{a+3}{x}$;

3) $\frac{2x^2}{a-b} : \frac{6x^4}{b-a}$;

4) $\frac{4a^6}{x-4} : \frac{8a^5}{4-x}$;

5) $\frac{(a-6)^5}{3a^4} : \frac{(6-a)^4}{30a}$;

6) $\frac{4b}{(5-b)^3} : \frac{16b^5}{(b-5)^4}$;

7) $\frac{(a-b)^2}{2x^2-18y^2} : \frac{b-a}{2x+6y}$;

8) $\frac{4m-8n}{c-d} : \frac{4m^2-16n^2}{(d-c)^2}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Виконайте дії:

1) $\frac{20y^2}{3x} \cdot \frac{9x^2}{4y^6}$;

2) $\frac{12y}{5x^3} \cdot \frac{15x^9}{8y^2}$;

3) $\frac{9x^2}{4y^3} \cdot \frac{16y^6}{3x^3}$;

4) $\frac{24a}{7m^3} \cdot \frac{14m^7}{3at}$;

5) $\frac{9ab}{35m^7} : \frac{45a^2b^6}{21m^8}$;

6) $\frac{24d^5n}{33k^2} : \frac{8d^4n^2}{55k}$.

2 Виконайте дії:

$$1) \frac{21c^2}{5b^3n^6} \cdot \frac{15b^4n^8}{28c^3} : 3b;$$

$$3) \frac{8xy}{16a^2x} : \frac{24xy^2}{48x^2a} \cdot 5a^5;$$

$$2) \frac{56a^5b}{9m} \cdot \left(-\frac{45am^3}{21b^2} \right) : 10a^6;$$

$$4) \frac{5ab^2}{3xb} : \frac{15a^2b^2}{9xa} \cdot 10a^3.$$

3 Виконайте множення або ділення:

$$1) (-m^7) \cdot \frac{21}{(ma)^7};$$

$$3) \frac{(a+b)^4}{2} : (b+a)^5;$$

$$2) (6-x)^4 \cdot \frac{2}{(x-6)^5};$$

$$4) \frac{(a-b)^6}{3} : (b-a)^8.$$

4 Виконайте дії:

$$1) a^{14} \cdot \left(\frac{a^2}{b^3} \right)^2 \cdot \left(\frac{b}{a} \right)^3 \cdot \left(\frac{b^4}{a^5} \right)^3;$$

$$3) \left(\frac{2m^4}{7a^3} \right) \cdot \left(\frac{-7a^2}{3m^3} \right)^3;$$

$$2) (2m^5)^2 \cdot \left(\frac{3}{m^2} \right)^2 \cdot 6a^7 \cdot \left(\frac{a^2}{m} \right)^3;$$

$$4) 10a^2 : \left(\frac{5a}{b} \right) : \left(1\frac{1}{4}b \cdot (2a^2)^2 \right).$$

5 Спростіть вирази:

$$1) \frac{a^8 + a^6}{t^6} : \frac{a^6 + a^7}{t^7};$$

$$3) \frac{(x-y)^2}{16-m^2} : \frac{x^2-y^2}{m^2-16};$$

$$2) (9a-ab) : \frac{81-b^2}{a^2};$$

$$4) \frac{x^2-8ax+16a^2}{x^2+8ax+16a^2} \cdot \left(\frac{x+2a}{x-2a} \right)^3.$$

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Добуток виразів $\frac{3y}{x^4}$ і $\frac{x^4}{y}$ не залежить від значень x і y .

2) Якщо $x \cdot \frac{2}{5} = \frac{5}{2}$, то $x=1$.

3) Якщо $\frac{a}{b^2} = c$, то $a = \frac{c}{b^2}$.

4) Якщо $-\frac{m^3}{2n^2} = 1$, то $\left(-\frac{m^3}{2n^2} \right)^5 = -1$.

5) Якщо взяти на прокат на m днів комплект для сноубордингу (дошка, черевики, захисний шолом) за ціною a грн за добу, то доведеться сплатити $m \cdot a$ грн.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

- $a = \frac{a}{1}$;
- $(m-n)^2 = \frac{(m-n)^2}{1}$

ПРИГАДАЙТЕ!

- $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$, $c \neq 0$
- $a : \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

- $\left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$
- $(ab)^n = a^n b^n$



Леонардо да Вінчі (італ. *Leonardo da Vinci*) — видатний італійський учений, дослідник, винахідник і художник, архітектор, анатоміст, інженер. Особливу увагу Леонардо да Вінчі приділяв механіці, називаючи її «раєм математичних наук».



Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

1 $\frac{6}{n} \cdot \frac{k}{3} =$

А $\frac{2k}{n}$

Б $\frac{3k}{n}$

В $\frac{k}{3n}$

Г $\frac{k}{2n}$

2 $\frac{x}{y^2} : \frac{x^3}{y^8} =$

А $\frac{x^4}{y^{10}}$

Б $\frac{x^3}{y^{16}}$

В $\frac{y^4}{x^2}$

Г $\frac{y^6}{x^2}$

3 Виконайте піднесення до степеня: $\left(\frac{m^2}{2n^5}\right)^4$.

А $\frac{m^6}{8n^9}$

Б $\frac{m^8}{16n^{20}}$

В $\frac{m^8}{8n^{20}}$

Г $\frac{m^6}{16n^9}$

4 Відомо, що $\frac{3}{a} = \frac{t}{b}$. Виразіть a через b і t .

А $a = \frac{t}{3b}$

Б $a = \frac{3t}{b}$

В $a = \frac{3b}{t}$

Г $a = \frac{b}{3t}$

5 У готелі всього m номерів, серед них n номерів люкс. Яку частину ($y\%$) від загальної кількості номерів готелю становить кількість номерів люкс?

А $\frac{m}{n} \cdot 100$

Б $\frac{n}{m} \cdot 100$

В $\frac{n}{m}$

Г $\frac{m}{n}$

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Щоб знайти, скільки відсотків становить число b від a , слід знайти значення виразу $\frac{b}{a} \cdot 100\%$.

6 До кожного з виразів (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз серед виразів (А–Г), якщо $x \neq 0$, $x \neq 2$, $x \neq -1$.

1 $\frac{2x-4}{x^2+x} : \frac{x-2}{x+1}$

А $x-2$

2 $\frac{x^2+x}{2x-4} \cdot \frac{x-2}{x+1}$

Б $2x$

3 $\frac{2x^2+4x+2}{x} : \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$

В $\frac{x}{2}$

Г $\frac{2}{x}$

7 Спростіть вираз $\frac{(x+4)^2-8x}{x^2-16} : \frac{x^2+16}{5x-20}$ та знайдіть його значення, якщо $x = -3,9$.

8 Спростіть вираз $\frac{a^3+8b^3}{(a-b)^5} : \frac{4a^2b+16b^3-8ab^2}{(b-a)^5}$ та знайдіть його значення, якщо b становить 50% від a .

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



- У Новій Зеландії працює готель The Hobbit Motel, у якому можна жити так само, як Фродо й Більбо з відомої епопеї «Володар перснів» Джона Р. Р. Толкіна (John Tolkien). Інтер'єри готелю нагадують про село хоббітів.
- У лондонському готелі Brown's народжувалася знаменита «Книга джунглів» відомого письменника Редьярда Кіплінга.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ВИГІДНА ПРОПОЗИЦІЯ»

Магазин є постійним клієнтом компанії з виготовлення та продажу мобільних телефонів. За умовами договору магазин закупив n телефонів за ціною q грн ($q < 1500$) на суму S грн. Якщо на суму S грн магазин закупить більш сучасні телефони за ціною $q \geq 1500$, то отримає бонус, відповідно до якого одержить телефонів у k разів більше, ніж закупив би на таку саму суму без урахування бонусу.

- 1) Запишіть вираз, за допомогою якого можна визначити кількість n телефонів, закуплених магазином за умовами договору.
- 2) Визначте, скільки телефонів за ціною 1150 грн може закупити магазин на суму 391 000 грн.
- 3) Визначте, скільки телефонів за ціною 1800 грн може закупити магазин на суму 396 000 грн, якщо $k = 1,2$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

- 1) Виконайте множення:

$$1) \frac{c}{7} \cdot \frac{8}{c}; \quad 2) \frac{15}{b^3} \cdot \frac{b}{3}; \quad 3) \frac{20b}{3y^4} \cdot \frac{27y}{10b}; \quad 4) \frac{26a}{31b^3} \cdot \frac{62b^2}{13a^5}.$$

- 2) Виконайте дії:

$$1) \frac{7}{9+y} \cdot \frac{9+y}{7}; \quad 3) \frac{15a}{36-b^2} \cdot \frac{b-6}{3};$$

$$2) \frac{x^3}{m-n} \cdot \frac{m-n}{10x^3}; \quad 4) \frac{5m-5n}{n^2-m^2} \cdot \frac{n^2+mn}{10} \text{ при } m \neq \pm n.$$

- 3) Виконайте піднесення до степеня:

$$1) \left(\frac{x}{8y}\right)^2; \quad 2) \left(\frac{3c^4}{d^7}\right)^3; \quad 3) \left(\frac{5a^8}{2x^9y}\right)^4; \quad 4) \left(\frac{9x^2y^9}{8m^{30}n^6}\right)^3.$$

- 4) Подайте у вигляді дроби вираз:

$$1) \left(-\frac{x}{2y}\right)^4; \quad 2) \left(-\frac{c^2}{3d^6}\right)^3; \quad 3) \left(-\frac{9xy^4}{8a^7}\right)^2; \quad 4) \left(-\frac{2k^3n^{14}}{3x^4y^5}\right)^5.$$

- 5) Виконайте дії:

$$1) \frac{1}{m^8} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^8; \quad 3) \left(\frac{c^3}{d}\right)^3 \cdot \frac{(cd)^3}{c^8};$$

$$2) \frac{x^7}{y} \cdot \left(\frac{y^2}{x^5}\right)^2; \quad 4) \left(-\frac{4a^3}{x^4y}\right)^5 \cdot \left(-\frac{xy^3}{4a^5}\right)^3.$$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Творцем додатку Droid Translator для VoIP-телефонії є киянин Олександр Коновалов. Цей додаток — аналог уже популярних Skype і Viber. Але, на відміну від них, винахід українця вміє перекладати повідомлення співрозмовника на одну з 14 мов. Droid Translator — перший у світі VoIP-сервіс із функцією автоматичного синхронного перекладу.

Див. приклад 1

Див. приклад 2

Див. приклад 3

Див. приклад 4



Див. приклад 5



Див. приклад 6



ДОСЛІДЖУЄМО

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



- Перші роликові ковзани з'явилися на початку XVIII ст.
- У 1760 р. бельгійський фабрикант музичних інструментів Жозеф Мерлін прикріпив до льодових ковзанів по два колеса і представив новинку лондонському двору. Ковзання по паркету Мерлін супроводжував грою на скрипці.

“ Жодне людське дослідження не може називатися дійсною наукою, якщо воно не пройшло через математичні докази. ”

Леонардо да Вінчі

6 Виконайте ділення, вказавши ОДЗ виразів:

1) $\frac{6}{x} : \frac{2}{c}$;

2) $\frac{c}{d^6} : \frac{c^3}{d^9}$;

3) $\frac{a}{20m^4} : \frac{a^7}{4m}$;

4) $\frac{6c^7}{25x^3y^8} : \frac{27c}{20x^4y^6}$.

7 Виконайте дії:

1) $\frac{y-8}{k} : \frac{y-8}{k^2}$;

2) $\frac{12x^4}{10-y} : \frac{6x^8}{y-10}$;

3) $\frac{9y}{(y-11)^2} : \frac{36y^3}{(11-y)^3}$;

4) $\frac{25k-5m}{x-y} : \frac{125k^2-5m^2}{(y-x)^2}$.

8 Прокат однієї пари роликових ковзанів на майданчику коштує n грн за годину. За умови відвідування групою, яка складається з k осіб ($k > 10$), вартість прокату роликів за годину для всієї групи знижується на 8%. Визначте:

- 1) ціну прокату однієї пари роликів з урахуванням знижки, якщо $n = 50$ грн;
- 2) скільки заплатить група з 12 осіб за 1,5 год прокату роликів, якщо $n = 50$ грн;
- 3) вартість прокату роликів для 7 дітей упродовж 2 год за умови підвищення ціни прокату на 10%, якщо правила надання знижки не змінилися.

9 Виразіть:

1) b через a , якщо $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$;

2) x через y , якщо $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$;

3) y через k, t, x , якщо $\frac{x}{y} = \frac{k}{3t}$;

4) t через k, x, y , якщо $\frac{4x}{y} = \frac{k}{t}$.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

1 Виконайте дії:

1) $\left(\frac{2}{7} + \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{12}{4}$;

2) $\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{8}{5}$;

3) $\left(2 - \frac{3}{2}\right) : \frac{5}{2}$.

2 Обчисліть:

1) $\frac{3-4}{\frac{1}{2}}$;

2) $\frac{1}{\frac{1}{6}} - 3$;

3) $\frac{1}{1 - \frac{2}{5}}$;

4) $\frac{1}{1 - \frac{1}{1-3}}$.

ВЧОРА



Ви зводили громіздкі числові вирази, що містять звичайні та десяткові дроби, до простіших та обчислювали їх значення

СЬОГОДНІ



Ви навчитеся перетворювати раціональні вирази та зводити їх до простіших, тотожно рівних їм

ЗАВЖДИ



Зможете грамотно планувати свої витрати, складати бюджет і економити власні кошти

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

У боулінг-клубі ціна однієї доріжки становить m грн за годину. У неділю в клубі діє акція для школярів: з 11:00 до 15:00 ціна однієї доріжки за годину знижується на 40%. Скільки коштів зекономить кожний з учнів, якщо група з n школярів замовить одночасно 5 доріжок з 12:00 до 14:00?

Розв'язання

Оскільки ціна однієї доріжки — m грн за годину, то за 5 доріжок слід було б заплатити $5m$ грн за 1 год, а кожний учень мав би заплатити $\frac{2 \cdot 5m}{n}$ грн за 2 год. За умовою акції ціна доріжки за годину становить $m - (40\% \text{ від } m)$ грн, тобто $m - 0,4 \cdot m = 0,6m$ (грн). Отже, учні мають заплатити $(2 \cdot 5 \cdot 0,6m)$ грн за 5 доріжок. Тоді кожний учень має заплатити $\frac{2 \cdot 5 \cdot 0,6m}{n}$ грн. Щоб визначити, скільки коштів зекономить кожний з учнів, слід виконати дію $\frac{2 \cdot 5m}{n} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 0,6m}{n}$.

Розв'язувана задача зводиться до перетворення раціонального виразу, що містить арифметичні дії.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

У попередніх класах ви обчислювали значення числових виразів, виконуючи певні арифметичні дії, і завжди отримували конкретний числовий результат. Нагадаємо, що під час знаходження числового значення виразу найважливішим є дотримання послідовності виконання дій.

Під час перетворення раціональних виразів також важливо пам'ятати про дотримання чіткого порядку дій. Раціональний вираз перетворюється на вираз, тотожно рівний йому, за допомогою арифметичних дій, які ви вже вивчили.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



- Найбільший у світі сучасний боулінг-центр розташований в Японії і має 141 доріжку.
- Прототипи куль і кегель були знайдені археологами на розкопках Давнього Єгипту.
- Боулінг визнаний Міжнародним олімпійським комітетом і вважається кандидатом в олімпійські види спорту.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- раціональний дріб
- область допустимих значень раціонального дробу
- додавання й віднімання раціональних дробів
- множення й ділення раціональних дробів
- піднесення дробу до степеня
- скорочення дробів

**КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ**

Перш ніж перетворювати раціональний вираз, визначте порядок дій!

Слід пам'ятати, що тотожні перетворення виконуються на області допустимих значень виразу і, як правило, результатом таких перетворень є раціональний дріб, а не число. Але в разі підстановки числових значень замість змінних, що входять у вираз, остаточний результат перетворень набуватиме конкретного числового значення.

**ПРИКЛАД 1**

Виконаємо дії: $\left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{4ab}{a-b}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо область допустимих значень виразу.	ОДЗ: $\begin{cases} a \neq 0, \\ b \neq 0, \\ a \neq b \end{cases}$
КРОК 2	Виконаємо дію віднімання дробів у дужках.	$\frac{a}{b^2} - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab^2}$
КРОК 3	Розкладемо на множники чисельник отриманого на 1-му кроці дробу, ураховуючи, що наступною є дія множення дробів.	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
КРОК 4	Виконаємо множення дробів і скоротимо результат.	$\frac{(a-b)(a+b) \cdot 4ab}{ab^2 \cdot (a-b)} = \frac{4(a+b)}{b}$

Відповідь: $\frac{4(a+b)}{b}$.

**ПАМ'ЯТАЙТЕ!**

Тотожні перетворення раціональних виразів можна виконувати тільки на області їх допустимих значень.

**ТРЕНУЄМОСЯ**

1 Виконайте дії:

1) $\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{a}{6}$;

2) $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{3b}\right) \cdot \frac{b}{8}$;

3) $\left(\frac{a}{b} + \frac{2}{a}\right) \cdot \frac{a^2}{a^2 + 2b}$;

4) $\left(\frac{x}{y} - \frac{3}{x}\right) \cdot \frac{y^3}{x^2 - 3y}$;

5) $\left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{2xy}{x+y}$;

6) $\left(\frac{1}{m} - \frac{m}{n^2}\right) \cdot \frac{3mn}{n-m}$;

7) $\left(\frac{a}{b^2} - \frac{4}{b} + \frac{4}{a}\right) \cdot \frac{ab^2}{a^2 - 4b^2}$;

8) $\left(\frac{m}{n^2} + \frac{6}{n} + \frac{9}{m}\right) \cdot \frac{mn^2}{m^2 - 9n^2}$.

**ПРИКЛАД 2**

Спростимо вираз $\left(1 - \frac{m+n}{n-m}\right) : \frac{1}{m-n}$, визначивши ОДЗ.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо область допустимих значень виразу; зауважимо, що чисельник дроби, на який ми ділимо вираз у дужках, не дорівнює нулю.	$m \neq n$
КРОК 2	Виконаємо дію в дужках, пам'ятаючи, що: 1) $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$; 2) $-(a-b) = b-a$.	$1 - \frac{m+n}{n-m} = 1 \cdot \frac{n-m}{n-m} - \frac{m+n}{n-m} =$ $= \frac{n-m-m-n}{n-m} = \frac{-2m}{n-m} = \frac{2m}{m-n}$
КРОК 3	Виконаємо дію ділення дробів.	$\frac{2m}{m-n} : \frac{1}{m-n} = \frac{2m(m-n)}{m-n} = 2m$

Відповідь: $2m$ при $m \neq n$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Спростіть вираз:

$$1) \left(1 + \frac{1}{6a}\right) : \frac{1}{2a}; \quad 3) \left(2 - \frac{a-1}{2a}\right) : \frac{4}{a}; \quad 5) \left(1 - \frac{a+b}{b-a}\right) : \frac{2}{a-b};$$

$$2) \left(1 - \frac{1}{8x}\right) : \frac{1}{4x}; \quad 4) \left(3 - \frac{x+2}{5x}\right) : \frac{5}{x}; \quad 6) \left(\frac{x+y}{x-y} - 1\right) : \frac{1}{y-x};$$

$$7) \left(\frac{3a-5}{3a+5} - 2\right) : \frac{a+5}{9a+15}; \quad 8) \left(2 - \frac{6x+1}{6x-1}\right) : \frac{2x-1}{2-12x}.$$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Вибір способу розв'язання залежить від конкретного прикладу і має бути спрямований на раціональне розв'язання. Головне — не порушувати порядок арифметичних дій.

ПРИКЛАД 3

Доведемо тотожність $\left(\frac{a}{m+a} + \frac{a^2+m^2}{m^2-a^2} - \frac{a}{m-a}\right) : \frac{m+1}{2} = \frac{2}{m+1}$

при $m \neq -1$, $m \neq \pm a$.

Розв'язання

Крок	Зміст і результат дії
КРОК 1	Умови $m \neq -1$ і $m \neq \pm a$ є такими, за яких існують усі вирази, що входять у рівність. Отже, ОДЗ: $m \neq -1$, $m \neq \pm a$.
КРОК 2	Виконаємо додавання та віднімання дробів у дужках: $\frac{a}{m+a} + \frac{a^2+m^2}{(m-a)(m+a)} - \frac{a}{m-a} =$ $= \frac{a(m-a) + a^2 + m^2 - a(m+a)}{(m-a)(m+a)} = \frac{am - a^2 + a^2 + m^2 - am - a^2}{(m-a)(m+a)} = \frac{m^2 - a^2}{(m-a)(m+a)} = \frac{m^2 - a^2}{m^2 - a^2} = 1.$
КРОК 3	Виконаємо дію ділення: $1 : \frac{m+1}{2} = \frac{2}{m+1}.$

Відповідь: $\frac{2}{m+1}.$

 ПРИКЛАД 4

Спростимо вираз $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{m-1}}}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що в таких «багатоповерхових» дробах доцільно виконувати дії, починаючи «з кінця». Тому першою дією виконуємо додавання.	$1 \sqrt{m-1} + \frac{1}{m-1} = \frac{m-1+1}{m-1} = \frac{m}{m-1}$, причому $m \neq 1$
КРОК 2	Виконаємо наступну дію: ділимо 1 на отриманий дріб, тобто одержуємо дріб, обернений до даного.	$\frac{1}{\frac{m}{m-1}} = \frac{m-1}{m}$, причому $m \neq 0$
КРОК 3	Наступною дією виконаємо віднімання.	$1 \sqrt{m} - \frac{m-1}{m} = \frac{m - (m-1)}{m} = \frac{m-m+1}{m} = \frac{1}{m}$
КРОК 4	Останньою дією знайдемо дріб, обернений до даного.	$1 : \frac{1}{m} = m$, причому $m \neq 0$

Відповідь: m .
 ТРЕНУЄМОСЯ

3 У завданнях 1–4 доведіть тотожність:

- $\left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x-y} \right) : \frac{x-1}{3} = \frac{3}{x-1}$ при $x \neq y$, $x \neq 1$;
- $\left(\frac{a}{3a-3b} - \frac{2}{a-b} \right) : \frac{a-6}{3} = \frac{1}{a-b}$ при $a \neq b$, $a \neq 6$;
- $\left(\frac{a}{a+4} + \frac{a}{a-4} + \frac{a^2+16}{16-a^2} \right) : \frac{a-2}{2} = \frac{2}{a-2}$ при $a \neq \pm 4$, $a \neq 2$;
- $\left(\frac{1}{x+2} + \frac{x}{4-x^2} - \frac{2}{x^2+4x+4} \right) : \frac{x}{(x+2)^2} = -\frac{4}{x-2}$ при $x \neq \pm 2$, $x \neq 0$;

У завданнях 5–8 спростіть вираз:

- $\frac{1}{\frac{1}{k}} - 1$;
- $\frac{1}{1 + \frac{1}{x-1}}$;
- $\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$;
- $\frac{1}{\frac{1}{n-1} - 1}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У 60-ті роки минулого століття в головному мозку людини було виявлено особливі групи нервових клітин. Учені назвали їх нейронами тотожності й новизни.

Нейрони тотожності впізнають знайомі предмети, звуки, відчуття, щоденні події, ритм життя. Якщо в навколишньому середовищі довгий час нічого не змінюється, настає виснаження цих нейронів. Тоді говорять, що людина втратила інтерес.

У цей момент нейрони новизни, прагнучи діяльності, страждають від нестачі інформації.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Визначте, чи є правильним твердження:

$$1) 1 - \frac{m}{m+n} = \frac{4}{m+n} \text{ при } m \neq -n;$$

$$2) \left(x - \frac{x^2}{x+y} \right) (x+y) = xy \text{ при } x \neq -y.$$

2 Виконайте дії та спростіть вираз:

$$1) \frac{a}{3} - \frac{a^2 - 9}{9} : \frac{a+3}{3};$$

$$2) \left(c+x - \frac{2cx}{x+c} \right) \cdot \frac{c^2 - x^2}{3c^2 + 3x^2}.$$

3 Виконайте дії:

$$1) \left(\frac{n}{m} - \frac{m}{n} \right) \cdot \frac{3mn}{n^2 - m^2};$$

$$2) \left(\frac{2a}{b} + \frac{b}{2a} \right) : \frac{8a^2 + 2b^2}{4ab}.$$

4 Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{3-m}{m+3} - \frac{m+3}{3-m} \right) \cdot \frac{m^2 - 9}{42m};$$

$$2) \left(\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x+3} \right) : \frac{4x^2 + 4x + 24}{x^2 - 9}.$$

5 Складіть раціональний вираз до задачі та спростіть його.

Власна швидкість руху блакитної акули становить 19 км/год. Визначте час (у год), який витратить акула на подолання відстані 25 км за течією та повернення назад (тим самим шляхом), якщо швидкість течії v км/год.

6 Виконайте дії:

$$1) \frac{5}{5a-2} - \frac{2}{a+3} : \frac{5a-2}{9a^2-1};$$

$$2) \frac{a^2 - b^2}{2a^2b^2} \cdot \frac{4ab}{a-b} - \frac{a+b}{ab}.$$

7 Спростіть вирази та знайдіть їх значення при заданих значеннях змінних.

$$1) \left(4m - \frac{12m}{m-2} \right) : \left(m + \frac{8m-25}{2-m} \right), m = -\frac{1}{3};$$

$$2) \frac{25a^2 - 9}{4a^2 + 4a + 1} : \frac{5a-3}{2a+1} - \frac{7a+4}{1+2a}, a = -1;$$

$$3) (a+b) : \frac{a^3 - ab^2 + a^2b - b^3}{b^2} - \frac{a^2}{a^2 - b^2}, a = -1, b = 2;$$

$$4) \left(\frac{1}{y-1} - \frac{y+1}{1+y+y^2} \right) : \left(1 + \frac{9}{y^3-1} \right), y = -2.$$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Старовинна задача з «Арифметики» Леонтія Магницького.

Один чоловік вирішив віддати сина вчитися. Він запитав викладача, скільки всього учнів у нього вже є. Учитель відповів: «Якщо в клас додати стільки ж людей, скільки вже є, і ще половину від цього числа, та ще чверть, і до них додати твого сина, то в мене буде рівно 100 учнів». Скільки ж учнів було у викладача?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



В основному акули пересувають з крейсерською швидкістю приблизно 8 км/год. Але під час полювання або нападу середньостатистична акула прискорюється до 19 км/год. Акула-мако здатна розвинути швидкість до 50 км/год. Залежно від виду в пащі акули може бути від 30 до 400 зубів, і розташовані вони в кілька рядів. Сила стиснення щелеп чотириметрової акули — 20 кН.



Теренс Тао — видатний австралійський математик. Має найвищий коефіцієнт інтелекту IQ у світі — 230. У 24 роки став наймолодшим професором Каліфорнійського університету в Лос-Анджелесі. У 2006 р. нагороджений медаллю Філдса — найвищою нагородою в галузі математики.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



В Україні кількість людей, які систематично займаються фізкультурою та спортом, становить 12 %. Найбільший відсоток таких людей у Фінляндії — 72 %, Швеції — 69 % і Японії — 68 %.

8) Визначте, чи є тотожно рівними вирази:

$$1) \frac{3a}{a-4} - \frac{a+2}{2a-8} \cdot \frac{96}{a^2+2a} \text{ і } 3 + \frac{12}{a};$$

$$2) \frac{1}{x+y} \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) \cdot \frac{3x^2y^2}{x-y} + x^2 + y^2 - xy \text{ і } (x+y)^2.$$

9) Спростіть вираз:

$$1) \frac{m-2}{4m^2+16m+16} : \left(\frac{m}{2m-4} - \frac{m^2+4}{2m^2-8} - \frac{2}{m^2+2m} \right);$$

$$2) \left(\frac{1}{t+1} - \frac{3}{t^3+1} + \frac{3}{t^2-t+1} \right) \left(t - \frac{2t-1}{t+1} \right).$$

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Після виконання ділення $\frac{m-1}{k} : \frac{m-1}{k}$ отримаємо вираз, значення якого дорівнює 1.

2) Значення дробового виразу $\frac{35x-5y}{y-7x}$ при $y \neq 7x$ є цілим числом.

3) Значення виразу $\frac{x^2-25}{5} \cdot \frac{x+5}{2x-10}$ при $x \neq 5$ є невід'ємним числом.

4) Вираз $\frac{32-2x^2}{4-x}$ тотожно дорівнює виразу $8+2x$ при $x \neq 4$.

5) Якщо $x+y = \frac{a^2+8}{6}$ і $x-y = \frac{3}{a^2+8}$, то $x^2-y^2 = \frac{1}{2}$.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ВІЛЬНИЙ ЧАС»

Віка проводить на стадіоні 60 хв у день. Відомо, що t_1 хв вона витрачає на біг, а решту часу — на вправи. Під час бігу Віка витрачає 10 калорій за 1 хв, а під час виконання вправ — 15 калорій за 1 хв.

1) Запишіть і спростіть вираз, за допомогою якого можна визначити, скільки калорій витрачає Віка за годину занять.

2) Обчисліть значення отриманого виразу, якщо $t_1 = 20$ хв.

3) Відомо, що три рази на тиждень Віка займається плаванням, витрачаючи на нього t_2 год на день. Скільки відсотків часу витрачає Віка щодня на заняття вправами порівняно із щоденним часом, відведеним на плавання? Обчисліть цей відсоток, якщо $t_2 = 1\frac{1}{3}$ год.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 6

1 $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{3b}\right) \cdot \frac{b}{2} =$

А	Б	В	Г
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3b}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2b}$

2 $\left(2 - \frac{1}{a}\right) : \frac{2a-1}{a} =$

А	Б	В	Г
$\left(\frac{2a-1}{a}\right)^2$	1	0	$\left(\frac{a}{2a-1}\right)^2$

3 $\left(\frac{5}{x} + \frac{5}{x}\right) \left(\frac{3}{y} - \frac{3}{y} + \frac{x}{5}\right) =$

А	Б	В	Г
2	10	3	5

4 $\frac{1}{1 - \frac{9}{y}} =$

А	Б	В	Г
$\frac{y}{9-y}$	$\frac{9-y}{y}$	$\frac{y-9}{y}$	$\frac{y}{y-9}$

5 У залі кінотеатру m рядів. У кожному ряді розміщено однакову кількість крісел. Знайдіть кількість крісел у кожному ряду, якщо всього в залі n крісел.

А	Б	В	Г
$\frac{n}{m}$	$n-m$	$m \cdot n$	$\frac{m}{n}$

6 До кожного з виразів (1–3) доберіть тотожно рівний йому серед виразів (А–Г), якщо $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$.

1 $\left(1 - \frac{2}{x+1}\right) \cdot \frac{x(x+1)}{3x-3}$	А $\frac{x}{3}$
2 $\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) : \frac{2x^2}{3x^2-3}$	Б $3x$
3 $\frac{3x^2+6x+3}{(x+1)^2} \cdot \left(\frac{x^2-1}{x+1} + 1\right)$	В $\frac{3}{x}$
	Г $\frac{3}{x+1}$

7 Спростіть вираз:

$$\left(\frac{8}{x+8} + \frac{64+x^2}{x^2-64} - \frac{8}{x-8}\right) : \left(\frac{x+8}{8} - 1\right).$$

Знайдіть значення цього виразу, якщо $x = 1,25$.

8 Доведіть тотожність:

$$\left(\frac{20y}{y^2-25} + \frac{2y}{y+5} - \frac{2y}{15-3y}\right) : \frac{2y}{3y-15} = 4, \text{ якщо } y \neq \pm 5.$$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Виконайте дії:

1) $\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{6y}\right) \cdot \frac{y}{5};$

3) $\left(\frac{1}{k} - \frac{k}{m^2}\right) \cdot \frac{7km}{m-k};$

2) $\left(\frac{a}{b} - \frac{6}{a}\right) \cdot \frac{a^4}{a^2-6b};$

4) $\left(\frac{k}{c^2} + \frac{8}{c} + \frac{16}{k}\right) \cdot \frac{c^2k}{16c^2-k^2}.$

Див. приклад 1





Див. приклад 2



Див. приклад 3



Див. приклад 4



ДОСЛІДЖУЄМО

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Наприкінці 19 ст. американець Френк Вулворт першим придумав використовувати цінники, знижки на певні групи товарів, розпродаж і багато іншого. Магазины, у яких було втілено ці ідеї Вулворта, отримали назву «супермаркети».

“ Освіта є складним, багатогранним і кропітким процесом, і навіть для обдарованої людини цей процес не буде легшим. ”

Теренс Тао

2 Спростіть вираз:

1) $\left(1 - \frac{1}{12y}\right) : \frac{1}{3y}$;

3) $\left(\frac{c+n}{n-c} - 1\right) : \frac{4}{c-n}$;

2) $\left(4 - \frac{y+3}{4y}\right) : \frac{4}{y}$;

4) $\left(2 - \frac{3y+7}{3y-7}\right) : \frac{y-7}{28-12y}$.

3 Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{c}{c-n} - \frac{n}{c-n}\right) : \frac{n-2}{2} = \frac{2}{n-2}$ при $c \neq n$, $n \neq 2$;

2) $\left(\frac{m}{2m-2n} - \frac{4}{m-n}\right) : \frac{m-8}{2} = \frac{1}{m-n}$ при $m \neq n$, $m \neq 8$;

3) $\left(\frac{k}{k+2} + \frac{k^2+4}{4-k^2} + \frac{k}{k-2}\right) : \frac{k-1}{4} = \frac{4}{k-1}$ при $k \neq \pm 2$, $k \neq 1$;

4) $\left(\frac{1}{x-6} - \frac{6}{x^2-36} - \frac{x}{x^2-12x+36}\right) : \frac{x}{(x-6)^2} = -\frac{12}{x+6}$
при $x \neq \pm 6$, $x \neq 0$.

4 Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{\frac{1}{y}} - 2$; 2) $\frac{1}{1 - \frac{2}{y}}$; 3) $\frac{1}{1 - \frac{1}{1-k}}$; 4) $\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{n+1} - 1} + 1}$.

5 **Задача «Ювілейна акція».** На честь семиріччя компанії Charisma Fashion Group у бутику діє акція: у разі купівлі однієї одиниці будь-якого товару надається знижка 20 %, а за умови придбання двох і більше одиниць товару — знижка 30 % на всю суму покупки. Покупець вибрав рюкзак, ціна якого без урахування знижки дорівнює 340 грн.

- Скільки заплатить покупець за цей рюкзак за умови дії акції?
- На скільки гривень менше заплатить покупець за цей рюкзак, якщо скористається акцією?
- Скільки заплатить покупець за умови дії акції, якщо купить два такі рюкзаки?
- На скільки гривень менше заплатить покупець за ці два рюкзаки, якщо скористається акцією?
- Скільки потрібно купити таких рюкзаків за умови дії акції, щоб знижка за акцією становила 1020 грн?

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Розв'яжіть рівняння:

- $3x = 24$;
- $5x = -30$;
- $6 - 4x = 0$;
- $x^2 - 36 = 0$;
- $(5x + 38)(100 + x^2) = 0$;
- $(x^2 + 49)(34 - 10x) = 0$.