Є. П. Нелін

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

(початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, профільний рівень)

підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
Видавництво «Ранок»
2018

УДК [37.016:512](075.3)
Н49

Нелін Є. П.

Н49 Алгебра і початки аналізу (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / [Є. П. Нелін]. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018.

ISBN

УДК [37.016:512](075.3)

Інтернет-підтримка
Електронні матеріали
до підручника розміщено на сайті
interactive.ranok.com.ua

ISBN

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 4. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

РОЗДІЛ 5. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Шановні десятикласники і десятикласниці!

Ви починаєте вивчати новий предмет — «Алгебра і початки аналізу», який об'єднує матеріал кількох галузей математичної науки.

Як і в курсі алгебри, значну увагу будемо приділяти розв'язуванню рівнянь та розгляду властивостей функцій. Але поряд із розв'язуванням знайомих завдань, пов'язаних із раціональними дробами, степенями і коренями, у 10 класі ви познайомитеся з новими видами функцій — степеневими і тригонометричними, відповідними рівняннями й нерівностями, а також принципово новими поняттями — похідною та границею функції. Саме вивчення границі та похідної і є одним із завдань математичного аналізу.

Математичний аналіз (або просто аналіз) — галузь математики, що сформувалася у XVIII ст. і відіграла значну роль у розвитку природничих наук завдяки появі нового потужного універсального методу дослідження функцій, які застосовують під час розв'язування різноманітних прикладних задач.

У попередніх класах ви вже починали знайомитися з функцією. У цьому році ви навчитеся досліджувати функції на новому рівні з використанням нових математичних інструментів.

Як користуватися підручником

Підручник має шість розділів, кожний із яких складається з параграфів, деякі параграфи — з пунктів. Параграфи і пункти, як правило, містять такі структурні блоки.

Довідкові таблиці наведені на початку більшості параграфів (пунктів) і вміщують основні означення, ознаки та властивості розглядуваних понять теми, систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів з розв'язування завдань*. Радимо опрацювати цей матеріал у першу чергу, а вже після цього переходити до наступного блоку.

Пояснення й обґрунтування являють собою докладне викладення теоретичного матеріалу, наведеного в таблицях. Таке подання навчального матеріалу (спочатку структурованого у вигляді таблиць, а потім описаного детально) дозволить кожному з вас вибирати свій власний рівень ознайомлення з обґрунтуваннями, будуючи власну освітню траєкторію.

Приклади розв'язування завдань ознайомлять вас із основними ідеями щодо розв'язування завдань, допоможуть усвідомити й засвоїти способи дій з основними алгебраїчними поняттями, набути необхідних предметних компетентностей. Для того щоб виділити орієнтовні основи діяльності з розв'язування завдань (загальні орієнтири), у прикладах власне розв'язання супроводжуються коментарями, які допоможуть вам скласти план розв'язування аналогічних завдань.

Розв'язання	Коментар
Як можна записати розв'язання завдання	Як можна міркувати під час розв'язування такого завдання

За такого подання коментар не заважає сприйняттю основної ідеї розв'язання завдань певного типу і дає змогу за потреби отримати детальну консультацію щодо розв'язування, яка міститься в коментарі.

З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу наприкінці кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ.

Запитання для контролю допоможуть вам пригадати й осмислити вивчене, звернути увагу на головне в параграфі, оцінити рівень засвоєння теоретичного матеріалу параграфа.

Вправи подано за трьома рівнями складності:

- *задачі середнього рівня* мають позначку «°»;
- *задачі достатнього рівня* (дещо складніші) подано без позначки;
- *задачі високого рівня* мають позначку «*».

До більшості вправ наприкінці підручника наведено *відповіді*.

У рубриці **«Виявіть свою компетентність»** наведено задачі практичного змісту та завдання, які для отримання розв'язку вимагають аналізу, узагальнення, систематизації набутих знань.

Зверніть також увагу на запропоновані в тексті параграфів супроводжуючі запитання, що спонукають до більш глибокого самостійного осмислення навчального матеріалу, та завдання, виконання яких, на нашу думку, сприятиме формуванню певних предметних та ключових компетентностей. Ці запитання та завдання мають відповідні позначення.

Матеріали рубрик **«Відомості з історії», «Видатні математики»** допоможуть вам дослідити розвиток алгебри як науки та дізнатися про досягнення видатних учених України.

Для того щоб підручник допоміг вам у повній мірі, радимо ознайомитися із системою умовних позначень:

● початок обґрунтування твердження;

○ закінчення обґрунтування твердження;

▶ початок розв'язання задачі;

◁ закінчення розв'язання задачі;

? запитання до учнів;

! цікава інформація або така, яку варто обміркувати;

i матеріали, пов'язані з ІКТ;

завдання, які вимагають самостійного опрацювання, сприяють активізації розумової діяльності;

діяльність, розрахована на роботу в команді.

Розділ 1

СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

У цьому розділі ви:

- ознайомитеся із числовими функціями та їх властивостями;
- дізнаєтеся про корінь n-го степеня та його властивості;
- ознайомитеся зі степеневою функцією та її властивостями;
- навчитеся розв’язувати рівняння та нерівності, зокрема ірраціональні.

§1 ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1.1. Числові множини. Множина дійсних чисел

Таблиця 1

1. Числові множини

Дійсні числа R

Числа, які можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу

Раціональні числа Q

Можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число.
Записують у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу

$$\left(\frac{1}{3}=0,333...=0,(3)\right)$$

Ірраціональні числа

Не можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число.
Записують у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу

$$\left(\sqrt{2}=1,4142135...\right)$$

Цілі числа Z

Включають натуральні числа, числа, їм протилежні, та число 0

Дробові числа

Числа, складені із цілого числа часток одиниці ($\frac{2}{5}$ — звичайний дріб; 1,23 — десятковий дріб: $1,23=\frac{123}{100}$)

Натуральні числа N (цілі додатні)

У шкільному курсі математики натуральне число — основне неозначуване поняття

Число 0

Таке число, що будь-яке число при додаванні до нього не змінюється $(a+0=0+a=a)$

Цілі від'ємні числа

Числа, протилежні натуральним

Продовження таблиці 1

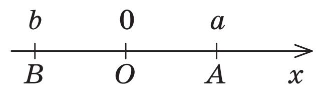
2. Модуль дійсного числа та його властивості

Означення

Модулем додатного числа **називається саме це число;** ***модулем від'ємного числа*** **називається число, йому протилежне;** ***модуль нуля*** **дорівнює нулю.**

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ 0 \text{ при } a = 0, \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases}$$

Геометричний зміст модуля



$|a| = OA$, $|b| = OB$, $|a-b| = AB$.

На координатній прямій ***модуль*** **— це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число.**

Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій

Властивості

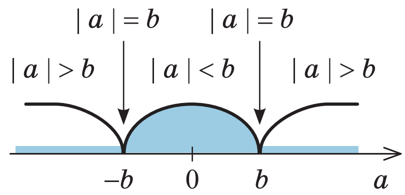
1. $|a| \geqslant 0$. *Модуль будь-якого числа — невід'ємне число*

2. $|-a| = |a|$. *Модулі протилежних чисел рівні*

3. $a \leqslant |a|$, тобто $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$. *Величина числа не перевищує величини його модуля*

4. При $b > 0$ $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$

5. При $b > 0$ $|a| \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b$ або $a \geqslant b$



6. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. *Модуль добутку дорівнює добутку модулів множників*

7. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$. *Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю)*

8. $|a^n| = |a|^n$, $|a|^2 = a^2$, $|a|^{2k} = a^{2k}$

9. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$,

$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$. *Модуль суми не перевищує суми модулів доданків*

10. $||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Числові множини

У курсі математики ви зустрічалися з різними числами: натуральними, цілими, раціональними, ірраціональними, дійсними. Уявлення про числа у людства складалися поступово, під впливом вимог практики. Наприклад, *натуральні числа* з'явилися у зв'язку з необхідністю підрахунку предметів. Але для того щоб дати відповідь на запитання «Скільки сірників у порожній коробці з-під сірників?», множини натуральних чисел $N = \{1; 2; 3; \ldots\}$ недостатньо — для цього потрібно мати ще й число нуль. Приєднуючи до множини N натуральних чисел число 0, одержуємо множину *невід'ємних цілих чисел*. Її часто позначають $N_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Одних тільки невід'ємних цілих чисел виявилося недостатньо для розв'язування практичних задач (а отже, і математичних задач, що відображують задану реальну ситуацію). Так, для того щоб охарактеризувати температуру повітря вище і нижче нуля чи рух тіла в протилежних напрямках, потрібні протилежні до натуральних числа, тобто *від'ємні числа*. Для натурального числа n протилежним вважають число $-n$, а для числа $-n$ протилежним вважають число n. Нуль вважають числом, протилежним самому собі.

> Натуральні числа, нуль і числа, протилежні натуральним, складають множину $\boldsymbol{Z}$ *цілих чисел*.

Вимірювання величин привело до необхідності розширення множини цілих чисел і введення *раціональних чисел*. Наприклад, середня багаторічна температура повітря в січні в м. Харкові становить $-7,3$ °C, тривалість уроку — 45 хв, або $\frac{3}{4}$ год.

Таким чином, вибираючи якусь одиницю вимірювання, ми одержуємо числове значення величин, що можна виразити за допомогою різних раціональних чисел — цілих і дробових, додатних і від'ємних.

> Цілі й дробові числа складають множину $\boldsymbol{Q}$ *раціональних чисел*.

Будь-яке раціональне число можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$ (тобто чисельник m є цілим числом, а знаменник n — натуральним).

Раціональне число можна записати різними дробами. Наприклад,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}, \quad -\frac{2}{7} = \frac{-2}{7} = \frac{-8}{28} = \frac{-10}{35},$$

$$1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = \frac{120}{100}, \quad 5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{50}{10}.$$

Як видно з наведених прикладів, серед дробів, що зображують дане раціональне число, завжди є єдиний нескоротний дріб (для цілих чисел — це дріб, знаменник якого дорівнює 1).

Зауважимо, що раціональне число, записане у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, можна записати також у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу, поділивши чисельник на знаменник. Наприклад, $\frac{3}{4} = 0,75$, $\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$.

Домовилися зображувати скінченний десятковий дріб у вигляді нескінченного, у якого після останнього десяткового знака, відмінного від нуля, на місці наступних десяткових знаків записані нулі, наприклад, $\frac{3}{4} = 0,75 = 0,750\,00\ldots$.

Також домовилися записувати цілі числа у вигляді нескінченного десяткового дробу, у якого праворуч від коми на місці десяткових знаків стоять нулі, наприклад $13 = 13,000\ldots$. Таким чином, будь-яке раціональне число може бути записане як нескінченний періодичний дріб. Нагадаємо, що в нескінченному періодичному дробі, починаючи з деякого місця, усі десяткові знаки повторюються. Групу цифр, що повторюється, називають *періодом дробу*; у записі дробу період наводять у дужках.

Наприклад, $\frac{1}{3}=0,3333...=0,(3)$,

$\frac{3}{22}=0,136\,363\,636...=0,1(36)$.

Отже, *кожне раціональне число може бути записане у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу і навпаки, кожний нескінченний періодичний десятковий дріб задає раціональне число.*

Зауважимо, що будь-який періодичний десятковий дріб, який має своїм періодом дев'ятку, дорівнює нескінченному десятковому дробу з періодом нуль, у якого десятковий розряд, що передує періоду, збільшений на одиницю порівняно з відповідним розрядом першого дробу. У подальшому, записуючи раціональні числа за допомогою нескінченних періодичних десяткових дробів, не розглядатимемо нескінченні періодичні дроби, період яких дорівнює дев'яти.

Кожне раціональне число можна зобразити точкою на координатній прямій (тобто на прямій, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям і одиницю виміру).

Наприклад, на рис. 1.1.1 зображено декілька раціональних чисел $\left(0; 1; -\frac{1}{2}; 2,5\right)$.

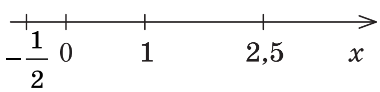


Рис. 1.1.1

Але на координатній прямій розташовані точки, які зображають числа, що не є раціональними. Наприклад, із курсу алгебри відомо, що число $\sqrt{2}$ не є раціональним. Це так зване *ірраціональне число*. Якщо побудувати квадрат зі стороною, що дорівнює 1, на координатній прямій x (рис. 1.1.2), то його діагональ дорівнюватиме $\sqrt{2}$. Тоді, провівши дугу кола з центром у точці O і радіусом $OK=\sqrt{2}$, одержимо точку M, координата якої дорівнює $\sqrt{2}$. Крім числа $\sqrt{2}$, ви також зустрічалися з ірраціональними числами $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$ тощо.

Пригадайте, яке «особливе» ірраціональне число вам відоме.

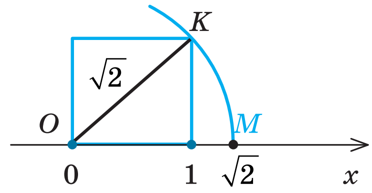


Рис. 1.1.2

Раціональні та ірраціональні числа складають *множину дійсних чисел* ***R***. На координатній прямій кожному дійсному числу відповідає єдина точка і, навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число (у такому разі кажуть, що *між множиною дійсних чисел і множиною точок координатної прямої встановлюється взаємно однозначна відповідність*).

Кожне дійсне число можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу: раціональні числа — у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, ірраціональні — у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Нагадаємо, що для порівняння дійсних чисел і виконання дій над ними (у випадку, коли хоча б одне з них не є раціональним) використовують наближені значення цих чисел.

Зокрема, *щоб порівняти два дійсних числа, треба розглядати послідовно їх наближені значення з недостачею з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д. доти, поки не одержимо якесь наближене значення одного числа, більше за відповідне наближене значення другого. Тоді те число, наближене значення якого більше, і вважається більшим.* Наприклад, якщо $\alpha=\sqrt{3}=1,732\,050\,8...$, $\beta=1\frac{3}{4}=1,750\,000\,0...$, то $\alpha<\beta$ (оскільки $1,73<1,75$).

Для того щоб виконати додавання чи множення розглянутих чисел α і β, послідовно записують їх наближені значення з недостачею та з надлишком (з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д.) і виконують дії над одержаними раціональними числами. У результаті послідовно отримують значення суми чи добутку з потрібною точністю.

α	β	$\alpha+\beta$	$\alpha\beta$
$1<\alpha<2$	$1<\beta<2$	$2<\alpha+\beta<4$	$1<\alpha\beta<4$
$1{,}7<\alpha<1{,}8$	$1{,}7<\beta<1{,}8$	$3{,}4<\alpha+\beta<3{,}6$	$2{,}89<\alpha\beta<3{,}24$
$1{,}73<\alpha<1{,}74$	$1{,}75<\beta<1{,}76$	$3{,}48<\alpha+\beta<3{,}50$	$3{,}0275<\alpha\beta<3{,}0624$
$1{,}732<\alpha<1{,}733$	$1{,}750<\beta<1{,}751$	$3{,}482<\alpha+\beta<3{,}484$	$3{,}031<\alpha\beta<3{,}034483$
...	...	...	...

Як бачимо, $\alpha+\beta=3{,}48\ldots$, $\alpha\beta=3{,}03\ldots$.

У курсі математичного аналізу доводиться той факт, що у випадку, коли наближені значення чисел α і β послідовно беруть із точністю до цілих, десятих, сотих і т. д., то значення суми $\alpha+\beta$ з недостачею і з надлишком прямує до одного й того самого числа, яке приймають за значення суми $\alpha+\beta$ (аналогічно визначають і добуток $\alpha\beta$).

2 Модуль дійсного числа та його властивості

Нагадаємо означення модуля.

Означення. ***Модулем*** **додатного числа називається саме це число, модулем від'ємного числа — число, йому протилежне; модуль нуля дорівнює нулю.**

Це означення можна коротко записати декількома способами:

$$|a|=\begin{cases}a \text{ при } a>0,\\ 0 \text{ при } a=0,\\ -a \text{ при } a<0,\end{cases}$$

або $$|a|=\begin{cases}a \text{ при } a\geqslant 0,\\ -a \text{ при } a<0,\end{cases}$$

або $$|a|=\begin{cases}a \text{ при } a>0,\\ -a \text{ при } a\leqslant 0,\end{cases}$$

або $$|a|=\begin{cases}a \text{ при } a\geqslant 0,\\ -a \text{ при } a\leqslant 0.\end{cases}$$

За потреби ми будемо користуватися будь-яким із цих записів означення модуля. Для того щоб знайти $|a|$, за означенням необхідно знати знак числа a і використати відповідну формулу. Наприклад, $|5|=5$, $|-3|=-(-3)=3$, $|\sqrt{3}-2|=-(\sqrt{3}-2)=2-\sqrt{3}$.

Геометричний зміст модуля

На координатній прямій модуль числа — це відстань від початку координат до точки, що зображує це число.

Дійсно, якщо $a>0$ (рис. 1.1.3), то відстань $OA=a=|a|$. Якщо $b<0$, то відстань $OB=-b=|b|$.

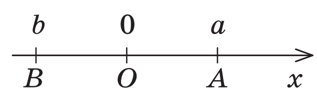


Рис. 1.1.3

Із геометричного змісту модуля випливає така **властивість**.

Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій.

Для доведення можна скористатися тим, що внаслідок паралельного перенесення вздовж осі координат на b одиниць абсциса відповідної точки змінюється на b: до абсциси заданої точки додається число b, тобто при $b>0$ точка переноситься вправо, а при $b<0$ — уліво. Позначимо на координатній прямій числа a, b, $a-b$ відповідно точками A, B, C. На рис. 1.1.4 ці точки зображено для випадку $a>0$ і $b<0$, хоча наведене далі обґрунтування не залежить від знаків a і b. Унаслідок паралельного перенесення вздовж осі Ox на b одиниць точка O перейде в точку B, а точка C з координатою $a-b$ — у точку з координатою $a-b+b=a$, тобто в точку A. Тоді $CO=AB$. Але відстань CO — це відстань від точки з координатою $a-b$ до початку координат, тобто $CO=|a-b|$, а отже, і $AB=|a-b|$. ○

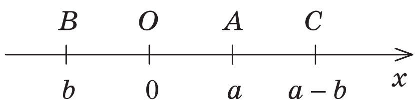


Рис. 1.1.4

Використовуючи означення модуля та його геометричний зміст, можна обґрунтувати властивості модуля, наведені в табл. 1.

Наприклад, ураховуючи, що $|a|$ — це відстань від точки a до точки O (рис. 1.1.4), а відстань може виражатися тільки невід'ємним числом, одержуємо: $|a|\geqslant 0$, тобто *модуль будь-якого числа є невід'ємним числом.*

Ураховуючи, що точки a і $-a$ розташовані на однаковій відстані від точки O, одержуємо: $|-a|=|a|$, це означає, що *модулі протилежних чисел рівні.*

Якщо $a\geqslant 0$, то $|a|=a$, а якщо $a<0$, то $a<|a|$. Отже, завжди $a\leqslant|a|$, тобто *величина числа не перевищує величини його модуля.*

Якщо в останню нерівність замість a підставити $-a$ і врахувати, що $|-a|=|a|$, то одержимо нерівність $-a\leqslant|a|$. Звідси $a\geqslant-|a|$, що разом із нерівністю $a\leqslant|a|$ свідчить, що для будь-якого дійсного числа a виконується подвійна нерівність

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|. \qquad (1)$$

Для $b>0$ нерівність $|a|\leqslant b$ означає, що число a на координатній прямій розміщене на такій відстані від точки O, яка не перевищує b (рис. 1.1.5), тобто в проміжку $[-b;b]$. Навпаки, якщо число a належить цьому проміжку, тобто $-b\leqslant a\leqslant b$, то $|a|\leqslant b$. Отже,

$$\text{для } b>0 \quad |a|\leqslant b \Leftrightarrow -b\leqslant a\leqslant b. \qquad (2)$$

Зауважимо, що останнє твердження справедливе і для $b=0$ (тоді обидві нерівності задовольняє тільки одне значення $a=0$).

Аналогічно для $b>0$ нерівність $|a|\geqslant b$ означає, що число a на координатній прямій розташоване на такій відстані від точки O, яка більша або дорівнює b (рис. 1.1.5), тобто в цьому випадку $a\leqslant-b$ або $a\geqslant b$. Навпаки, якщо число a задовольняє одну із цих нерівностей, то $|a|\geqslant b$. Отже, для $b>0$ нерівність $|a|\geqslant b$ рівносильна сукупності нерівностей $a\leqslant-b$ або $a\geqslant b$, що можна записати так:

для $b>0$ $|a|\geqslant b\Leftrightarrow a\leqslant-b$ або $a\geqslant b$.

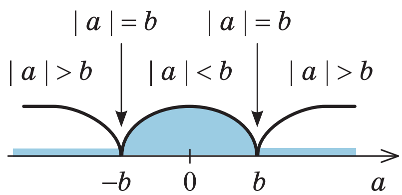


Рис. 1.1.5

Властивості модуля добутку і модуля дробу відображують відомі правила дій над числами з однаковими і різними знаками:

модуль добутку дорівнює добутку модулів множників, тобто $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$;

модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю), тобто $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

Формулу для знаходження модуля добутку можна узагальнити для випадку декількох множників:

$$|a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n|=|a_1|\cdot|a_2|\cdot\ldots\cdot|a_n|. \qquad (3)$$

Якщо у формулі (3) взяти $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, одержуємо формулу $|a^n| = |a|^n$.

Записавши останню формулу справа наліво для $n = 2k$ і врахувавши, що $a^{2k} \geqslant 0$ при всіх значеннях a, одержуємо $|a|^{2k} = |a^{2k}| = a^{2k}$. Отже, $|a|^{2k} = a^{2k}$.

Для обґрунтування нерівності

$$|a+b| \leqslant |a|+|b| \qquad (4)$$

запишемо нерівність (1) для чисел a і b: $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$; $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$. Додавши почленно ці нерівності, одержуємо $-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|$. Ураховуючи нерівність (2), маємо $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, тобто *модуль суми не перевищує суми модулів доданків.*

Якщо в нерівності (4) замінити b на $-b$ і врахувати, що $|-b| = |b|$, то одержимо нерівність

$$|a-b| \leqslant |a|+|b|. \qquad (5)$$

Якщо записати число a як $a = b + (a-b)$ і використати нерівність (4), то одержимо нерівність $|a| \leqslant |b| + |a-b|$. Звідси

$$|a|-|b| \leqslant |a-b|. \qquad (6)$$

Якщо в нерівності (6) замінити b на $-b$ і врахувати, що $|-b| = |b|$, то одержимо нерівність

$$|a|-|b| \leqslant |a+b|, \qquad (7)$$

тобто *модуль суми двох чисел не менший від різниці їхніх модулів.*

Міняючи місцями букви a і b у нерівностях (6) і (7) та враховуючи, що $|a-b| = |b-a|$, одержимо також нерівність

$$|b|-|a| \leqslant |a \pm b| \qquad (8)$$

Нерівності (4)–(8) можна коротко записати так:

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Доведіть, що **сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка (якщо дільник не дорівнює нулю) двох раціональних чисел завжди є раціональним числом.**

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай задано два раціональних числа $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ і $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, де m_1 і m_2 — цілі, а n_1 і n_2 — натуральні числа. Оскільки сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка двох звичайних дробів завжди є звичайним дробом, то одержаний результат завжди буде раціональним числом. Наприклад, $r_1 + r_2 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2}$, де $m_1 n_2 + n_1 m_2$ — ціле число, а $n_1 n_2$ — натуральне. ◁	Будь-яке раціональне число можна записати як дріб $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне числа. Щоб обґрунтувати твердження задачі, достатньо довести, що сума, різниця, добуток і частка двох дробів виду $\frac{m}{n}$ буде дробом такого самого виду.

Приклад 2 Доведіть, що **для будь-якого натурального числа n число $\sqrt{n}$ або натуральне, або ірраціональне.**

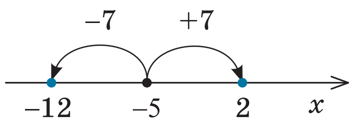
Розв'язання	Коментар
▶ Припустимо, що число $\sqrt{n}$ не є ірраціональним (тоді це число раціональне) і не є натуральним числом. Отже, це число може бути тільки раціональним нескоротним дробом $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, де p і q — натуральні числа $(q\neq 1)$. За означенням квадратного кореня маємо $n=\frac{p^2}{q^2}$, тобто $n=\frac{p\cdot p}{q\cdot q}$. Ураховуючи, що $q\neq 1$, одержуємо, що дріб $\frac{p\cdot p}{q\cdot q}$, який дорівнює натуральному числу n, повинен бути скоротним. Отже, у натуральних множників, що стоять у чисельнику і знаменнику цього дробу, повинен бути спільний натуральний дільник, який відрізняється від 1. Але в чисельнику стоять тільки множники p, а в знаменнику — тільки множники q. Тоді числа p і q мають натуральний дільник, який відрізняється від 1, тобто дріб $\frac{p}{q}$ є скоротним дробом, що суперечить умові. Таким чином, наше припущення неправильне, і для будь-якого натурального числа n число $\sqrt{n}$ або натуральне, або ірраціональне. ◁	Для доведення твердження задачі можна використати метод від супротивного: припустити, що задане додатне число є раціональним ненатуральним (тобто дробом), і отримати суперечність із умовою або з якимось відомим фактом. Записуючи число $\sqrt{n}$ у вигляді нескоротного дробу, слід ураховувати, що при натуральних значеннях n це число завжди буде невід'ємним.

Наприклад, оскільки числа $\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$ не є натуральними числами ($1<\sqrt{3}<2$, $3<\sqrt{10}<4$), то $\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$ — ірраціональні числа.

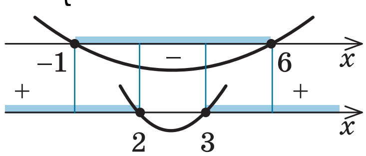
Приклад 3* Доведіть, що сума $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ — число ірраціональне.

Розв'язання	Коментар
▶ Припустимо, що число $\sqrt{3}+\sqrt{5}=r$ — раціональне. Тоді $\sqrt{5}=r-\sqrt{3}$. Піднісши обидві частини останньої рівності до квадрата, маємо: $5=r^2-2r\sqrt{3}+3$. Звідси $2r\sqrt{3}=r^2-2$. Отже, $\sqrt{3}=\frac{r^2-2}{2r}$. Але права частина цієї рівності — раціональне число (оскільки за припущенням r — раціональне число), а ліва — ірраціональне. Одержана суперечність означає, що наше припущення неправильне і число $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ірраціональне. ◁	Для доведення твердження задачі можна використати метод від супротивного — припустити, що задане число є раціональним, і отримати суперечність із якимось відомим фактом, наприклад із тим, що $\sqrt{3}$ — ірраціональне число. Аналізуючи одержані вирази, використаємо результат прикладу 1: якщо число r раціональне, то числа r^2-2 і $2r$ та їх частка теж будуть раціональними. Зазначимо, що знаменник отриманого дробу $2r=2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\neq 0$.

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння[1] $|2x+5|=7$.

Розв'язання	Коментар
I спосіб	
▶ $2x+5=7$ або $2x+5=-7$; $2x=2$ або $2x=-12$; $x=1$ або $x=-6$. *Відповідь*: 1; −6. ◁	Задане рівняння має вигляд $|t|=7$ (у даному випадку $t=2x+5$). Його зручно розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля: $|2x+5|$ — це відстань від точки 0 до точки $2x+5$. Але відстань 7 може бути відкладена від 0 як праворуч (одержуємо число 7), так і ліворуч (одержуємо число −7). Отже, рівність $|2x+5|=7$ можлива тоді і тільки тоді, коли $2x+5=7$ або $2x+5=-7$.
II спосіб	
▶ $|2x-(-5)|=7$;  *Рис. 1.1.6* $2x=2$ або $2x=-12$; $x=1$ або $x=-6$. *Відповідь*: 1; −6. ◁	Виходячи з геометричного змісту модуля, $|a-b|$ — відстань між точками a і b на координатній прямій. Запишемо задане рівняння у вигляді $|2x-(-5)|=7$. Ця рівність означає, що відстань від точки $2x$ до точки −5 дорівнює 7. На відстані 7 від точки −5 розташовані точки 2 і −12 (рис. 1.1.6). Отже, задана рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $2x=2$ або $2x=-12$, тобто задане рівняння рівносильне сукупності цих рівнянь.

Приклад 5 Розв'яжіть нерівність $|x^2-5x|\leqslant 6$.

Розв'язання	Коментар
▶ $-6\leqslant x^2-5x\leqslant 6$, $\begin{cases} x^2-5x\leqslant 6, \\ x^2-5x\geqslant -6; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-5x-6\leqslant 0, \\ x^2-5x+6\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+1)(x-6)\leqslant 0, \\ (x-2)(x-6)\geqslant 0. \end{cases}$ Розв'язуючи ці нерівності (рис. 1.1.7), отримуємо: $\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 6, \\ x\leqslant 2 \text{ або } x\geqslant 3. \end{cases}$  *Рис. 1.1.7* Отже, $-1\leqslant x\leqslant 2$ або $3\leqslant x\leqslant 6$. *Відповідь*: $[-1;2]\cup[3;6]$. ◁	Задана нерівність має вигляд $|t|\leqslant 6$ (у даному випадку $t=x^2-5x$), і її можна розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля. Виходячи з геометричного змісту модуля, $|t|$ — це відстань від точки 0 до точки t. На відстані 6 від 0 розташовані числа 6 і −6. Тоді нерівність $|t|\leqslant 6$ задовольняють усі ті й тільки ті точки, які містяться у проміжку $[-6;6]$, тобто $-6\leqslant t\leqslant 6$. Для розв'язування одержаної подвійної нерівності її зручно замінити відповідною системою нерівностей.

[1] Розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять знак модуля, докладніше розглянуто в § 2.

Запитання для контролю

1. Поясніть, які числа входять до множин цілих, раціональних і дійсних чисел. Наведіть приклади. Зобразіть відповідні точки на координатній прямій.
2. Поясніть, чим відрізняються записи раціонального та ірраціонального чисел у вигляді нескінченного десяткового дробу.
3. Поясніть, як порівнюють дійсні числа.
4. Дайте означення модуля дійсного числа.
   1) Сформулюйте властивості модуля.
   2*) Обґрунтуйте властивості модуля дійсного числа.

Вправи

1.1.1. Поясніть, чому задане дійсне число не може бути раціональним:
1) $1+\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{10}$; 5) $2-\sqrt{5}$.
2) $\sqrt{3}-5$; 4) $\sqrt{7}+3$;

1.1.2*. Доведіть, що сума, різниця, добуток і частка раціонального та ірраціонального чисел завжди є числом ірраціональним (добуток і частка тільки у випадку, коли задане раціональне число не дорівнює нулю).

1.1.3*. Доведіть, що задане дійсне число є ірраціональним:
1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$;
2) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$.

1.1.4. Користуючись геометричним змістом модуля, зобразіть на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівність:
1°) $|x|\leqslant 2$; 3) $|x-3|\leqslant 0{,}5$;
2°) $|x|>5$; 4) $|x+1|<0{,}3$.

1.1.5. Розв'яжіть рівняння:
1) $|3x+1|=4$; 3*) $||x-1|-2|=1$;
2) $|4x-2|=6$; 4*) $||2x+3|-5|=3$.

1.1.6. Розв'яжіть нерівність:
1) $|2x-7|\leqslant 1$; 3*) $||2x-1|+3|\geqslant 5$;
2) $|3x+5|>7$; 4*) $||4x+7|-11|<4$.

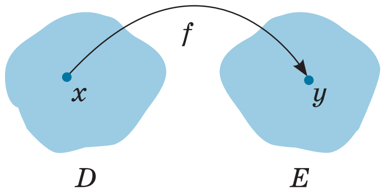
Виявіть свою компетентність

1.1.7. Які значення слова «модуль» вам відомі? Як, на вашу думку, вони пов'язані з математичним поняттям «модуль»? Знайдіть у мережі Інтернет інформацію з цієї теми, обговоріть її з друзями та подругами.

1.2. Числові функції та їх найпростіші властивості

Таблиця 2

1. Поняття числової функції



Числовою функцією з областю визначення D **називається залежність, при якій кожному числу** x **із множини** D **(області визначення) ставиться у відповідність єдине число** y**.**

Записують цю відповідність так: $y = f(x)$.

Позначення і терміни:

$D(f)$ — область визначення;

$E(f)$ — область значень;

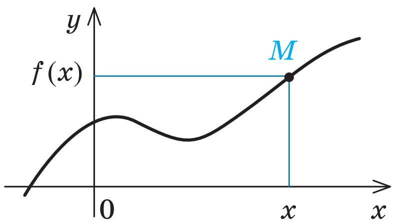
x — аргумент (незалежна змінна);

y — функція (залежна змінна);

f — функція;

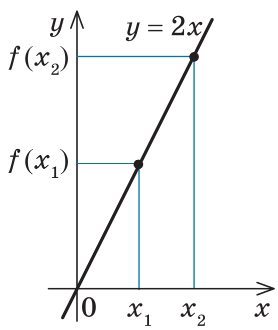
$f(x_0)$ — значення функції f у точці x_0

2. Графік функції



Графіком функції f **називається множина всіх точок координатної площини з координатами** $(x; f(x))$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції f у точці x

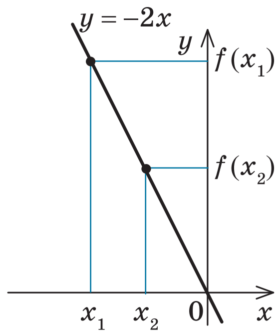
3. Зростаючі й спадні функції



Функція $f(x)$ **зростаюча на множині** P:

якщо $x_2 > x_1$, **то** $f(x_2) > f(x_1)$ для всіх $x \in P$

(при збільшенні аргумента відповідні точки графіка «піднімаються»)

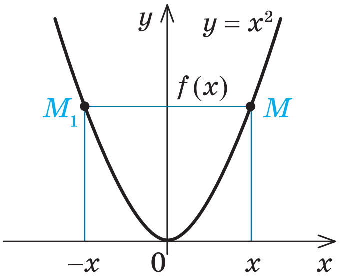
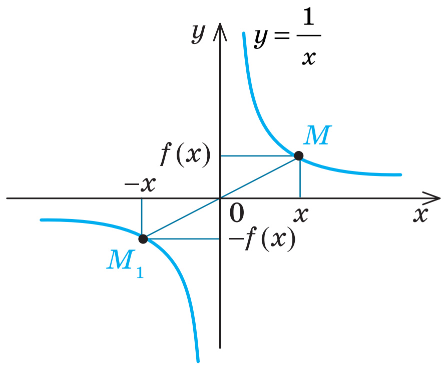


Функція $f(x)$ **спадна на множині** P:

якщо $x_2 > x_1$, **то** $f(x_2) < f(x_1)$ для всіх $x \in P$

(при збільшенні аргумента відповідні точки графіка «опускаються»)

Продовження таблиці 2

4. Парні й непарні функції	
	Функція $f(x)$ **парна:** $f(-x) = f(x)$ для всіх x із області визначення. **Графік парної функції симетричний відносно осі *Oy***
	Функція $f(x)$ **непарна:** $f(-x) = -f(x)$ для всіх x із області визначення. **Графік непарної функції симетричний відносно початку координат — точки *O***

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття функції

З поняттям функції ви ознайомилися в курсі алгебри. Нагадаємо, що *залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.*

> Функція — від латин. *function* — виконання, здійснення.

У курсі алгебри і початків аналізу ми будемо користуватися таким означенням числової функції.

> **Означення.** ***Числовою функцією з областю визначення D*** **називається залежність, при якій кожному числу *x* із множини *D* ставиться у відповідність єдине число *y*.**

Функції позначають латинськими (іноді грецькими) буквами. Розглянемо довільну функцію f. Число y, яке відповідає числу x (на рисунку до п. 1 табл. 2 це показано стрілкою), називають *значенням функції f у точці x* і позначають $f(x)$.

Область визначення функції f — це множина тих значень, яких може набувати аргумент x. Її позначають $D(f)$.

Область значень функції f — це множина, яка складається з усіх чисел $f(x)$, де x належить області визначення. Її позначають $E(f)$.

Найчастіше функцію задають **за допомогою формули.** Якщо немає додаткових обмежень, то *областю визначення функції, заданої формулою, вважають множину всіх значень змінної, при яких ця формула має зміст.*

Наприклад, якщо функція задана формулою $y = \sqrt{x} + 1$, то її область визначення $x \geqslant 0$, тобто $D(y) = [0; +\infty)$, а область значень $y \geqslant 1$, тобто $E(y) = [1; +\infty)$.

Іноді функція може задаватися різними формулами на різних множинах значень аргумента. Наприклад,

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Функцію можна задати не тільки за допомогою формули, а й **за допомогою таблиці, графіка** чи **словесного опису.**

Наприклад, на рис. 1.2.1 графічно задано функцію $y = f(x)$ з областю визначення $D(f) = [-1; 3]$ і множиною значень $E(f) = [1; 4]$.

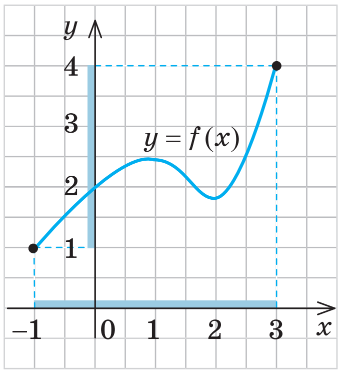


Рис. 1.2.1

> **Означення.** ***Найбільшим (найменшим) значенням функції $f(x)$ на множині M, на якій ця функція задана,*** **називається значення функції $f(x)$ в деякій точці x_0 множини M, якщо ні в якій іншій точці множини функція не має більшого (меншого) значення.**

Тобто для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x) \leqslant f(x_0)$ (відповідно $f(x) \geqslant f(x_0)$ для найменшого значення).

Іноді це записують так: $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$ (відповідно $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$).

Наприклад, для функції $y = f(x)$, графічно заданої на проміжку $[-1; 3]$ на рис. 1.2.1, найменше значення дорівнює 1, а найбільше — 4. Тобто $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 4$; $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = 1$.

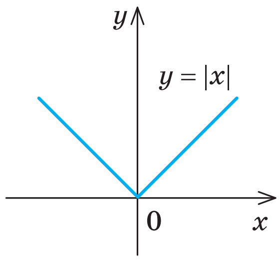


Рис. 1.2.2

2 Графік функції

Нагадаємо означення графіка функції.

> **Означення.** ***Графіком функції*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ **називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції f у точці x.**

На рисунках до п. 4 табл. 2 наведено графіки функцій $y = x^2$ та $y = \dfrac{1}{x}$, а на рис. 1.2.2 — графік функції $y = |x|$.

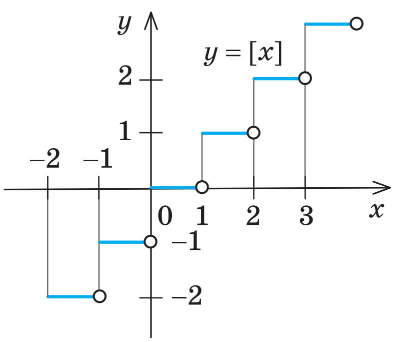


Рис. 1.2.3

Наведемо також графік функції $y = [x]$, де $[x]$ — позначення *цілої частини* числа x, тобто найбільшого цілого числа, яке не перевищує x (рис. 1.2.3). Область визначення цієї функції $D(y) = \boldsymbol{R}$ — множина всіх дійсних чисел, а область значень $E(y) = \boldsymbol{Z}$ — множина всіх цілих чисел.

На рис. 1.2.4 наведено графік функції $y = \{x\}$, де $\{x\}$ — позначення *дробової частини* числа x (за означенням $\{x\} = x - [x]$).

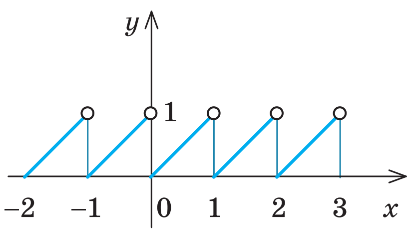
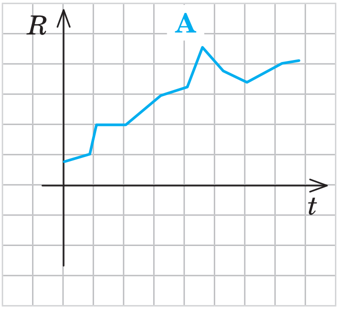
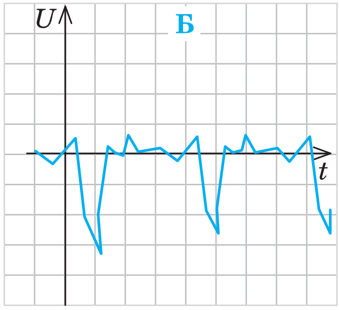
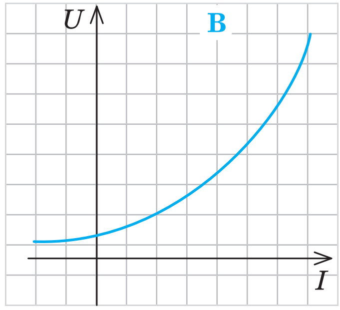


Рис. 1.2.4

Звертаючись до фізики, хімії, економіки, медицини, можемо знайти зразки графіків функцій.

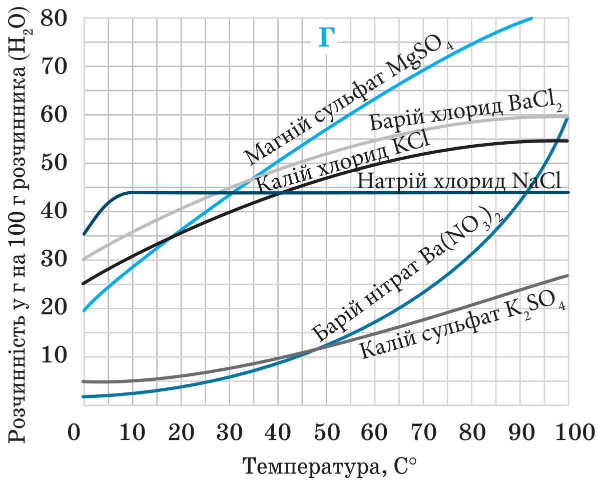






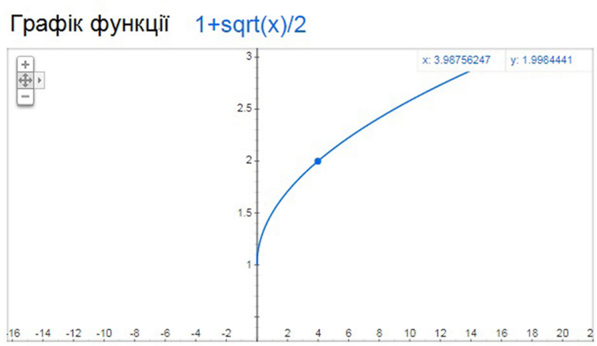
Наприклад:

- графік А, що відображує динаміку курсу долара — залежність вартості R долара у гривнях від часу t;
- фрагмент кардіограми Б — залежність різниці потенціалів U на поверхні шкіри пацієнта від часу t;
- вольт-амперна характеристика В діода — залежність напруги від сили струму;
- залежність Г розчинності твердих речовин від температури.



Сьогодні для побудови графіків усе частіше використовують спеціальне програмне забезпечення. Графіки можна будувати за допомогою програм GeoGebra, Graph, Advanced Grapher тощо.

Чи не найпростішим для користувачів є сервіс Google. За його допомогою можна, зокрема, будувати графіки функцій, заданих аналітично. Для цього в рядок пошуку треба ввести формулу, якою задано функцію, наприклад $1+\mathrm{sqr}(x)/2$, і натиснути клавішу «Enter». (Нагадаємо, що запис формул відбувається певним чином, про це вам відомо з уроків інформатики.) У результаті отримаємо графік функції $y=1+\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ (див. рисунок).



3 Зростаючі та спадні функції

Важливими характеристиками функцій є їх зростання та спадання.

Означення. Функція $f(x)$ називається *зростаючою на множині* P, якщо більшому значенню аргумента із цієї множини відповідає більше значення функції.

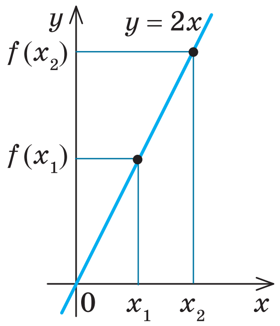


Рис. 1.2.5

Тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 із множини P: **якщо** $\boldsymbol{x_2 > x_1}$**, то** $\boldsymbol{f(x_2) > f(x_1)}$.

Наприклад, функція $f(x) = 2x$ зростаюча (на всій області визначення, тобто на множині $\boldsymbol{R}$), оскільки якщо $x_2 > x_1$, то $2x_2 > 2x_1$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$.

Відповідні точки графіка зростаючої функції при збільшенні аргумента «піднімаються» (рис. 1.2.5).

На рис. 1.2.6 наведено графік зростаючої функції $y = x^3$. Дійсно, при $x_2 > x_1$ маємо $x_2^3 > x_1^3$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$.

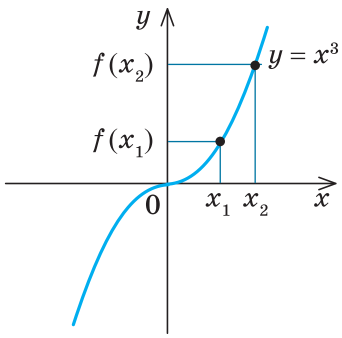


Рис. 1.2.6

Означення. Функція $\boldsymbol{f(x)}$ **називається *спадною на множині*** $\boldsymbol{P}$**, якщо більшому значенню аргумента із цієї множини відповідає менше значення функції.**

Тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 із множини P: **якщо** $\boldsymbol{x_2 > x_1}$**, то** $\boldsymbol{f(x_2) < f(x_1)}$.

Наприклад, функція $f(x) = -2x$ спадна (на всій області визначення, тобто на множині $\boldsymbol{R}$), оскільки якщо $x_2 > x_1$, то $-2x_2 < -2x_1$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$. Відповідні точки графіка спадної функції при збільшенні аргумента «опускаються» (рис. 1.2.7).

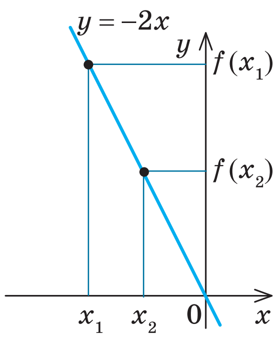


Рис. 1.2.7

Розглядаючи графік функції $y = x^2$ (рис. 1.2.8), бачимо, що на всій області визначення ця функція не є ні зростаючою, ні спадною. Але можна виділити проміжки області визначення, де ця функція зростає і де спадає. Так, на проміжку $[0; +\infty)$ функція $y = x^2$ зростає, а на проміжку $(-\infty; 0]$ — спадає.

Зазначимо, що для зростаючих і спадних функцій виконуються **властивості**, обернені до тверджень, що містяться в означеннях.

Якщо функція зростає, то більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента.

Якщо функція спадає, то більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента.

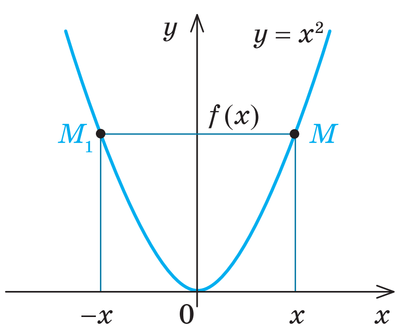


Рис. 1.2.8

Обґрунтуємо першу із цих властивостей методом від супротивного. Нехай функція $f(x)$ зростає і $f(x_2) > f(x_1)$. Припустимо, що аргумент x_2 не більший за аргумент x_1, тобто $x_2 \leqslant x_1$. Із цього припущення одержуємо: якщо $x_2 \leqslant x_1$ і $f(x)$ зростає, то $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, що суперечить умові $f(x_2) > f(x_1)$. Отже, наше припущення неправильне і, якщо $f(x_2) > f(x_1)$, то $x_2 > x_1$, що і потрібно було довести.

Аналогічно можна обґрунтувати і другу властивість. ○

Наприклад, якщо $x^3 > 8$, тобто $x^3 > 2^3$, то, ураховуючи зростання функції $f(x) = x^3$, одержуємо $x > 2$.

4 Парні й непарні функції

Розглянемо функції, області визначення яких симетричні відносно початку координат, тобто разом із кожним числом x містять і число $-x$. Для таких функцій визначено поняття парності й непарності.

Означення. Функція f називається *парною*, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = f(x)$.

Наприклад, функція $y = x^2$ (тобто функція $f(x) = x^2$) — парна, оскільки $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ парна, то до її графіка разом із кожною точкою M із координатами $(x; y) = (x; f(x))$ входить також і точка M_1 із координатами $(-x; y) = (-x; f(-x)) = (-x; f(x))$. Точки M і M_1 розміщені симетрично відносно осі Oy (рис. 1.2.9), тому й **графік парної функції розміщений симетрично відносно осі Oy.**

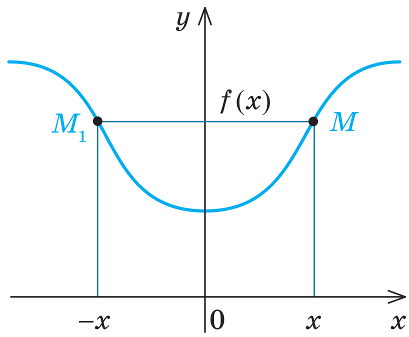


Рис. 1.2.9

Наприклад, графік парної функції $y = x^2$ (див. рис. 1.2.8) симетричний відносно осі Oy.

Означення. Функція f називається *непарною*, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ (тобто функція $f(x) = \frac{1}{x}$) непарна, оскільки $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ непарна, то до її графіка разом із кожною точкою M із координатами $(x; y) = (x; f(x))$ входить також і точка M_1 із координатами $(-x; y) = (-x; -f(x))$. Точки M і M_1 розміщені симетрично відносно початку координат (рис. 1.2.10), тому й **графік непарної функції розміщений симетрично відносно початку координат.**

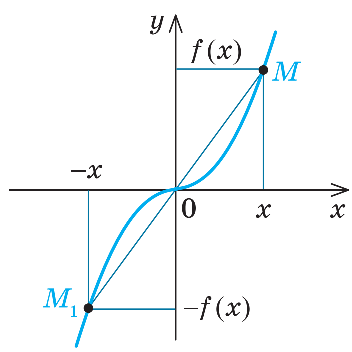


Рис. 1.2.10

Наприклад, графік непарної функції $y = \frac{1}{x}$ (див. п. 4 табл. 2) симетричний відносно початку координат, тобто відносно точки O.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Знайдіть область визначення функції:

1) $y=x^2+x$; 2) $y=\dfrac{x}{x^2+x}$; 3) $y=\sqrt{x+5}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▶ Обмежень для знаходження значень виразу x^2+x немає, отже, $D(y)=\boldsymbol{R}$. ◁ 2) ▶ Область визначення функції $y=\dfrac{x}{x^2+x}$ задана обмеженням $x^2+x\neq 0$, оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю. З'ясуємо, коли $x^2+x=0$. Маємо: $x(x+1)=0$, якщо $x=0$ або $x=-1$. Тоді область визначення можна задати обмеженнями $x\neq 0$, $x\neq -1$ або записати так: $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)$. ◁ 3) ▶ Область визначення функції $y=\sqrt{x+5}$ задана обмеженням $x+5\geqslant 0$, тобто $x\geqslant -5$, оскільки під знаком квадратного кореня повинен стояти невід'ємний вираз. Отже, $D(y)=[-5;+\infty)$. ◁	Оскільки всі функції задано формулами, то їхні області визначення — це множини всіх значень змінної x, при яких має зміст відповідна формула, тобто вираз, який стоїть у правій частині формули $y=f(x)$. У курсі алгебри зустрічалися тільки два *обмеження*, які необхідно враховувати *під час знаходження області визначення*: 1) *якщо вираз записано у вигляді дробу* $\dfrac{A}{B}$, *то знаменник* $B\neq 0$; 2) *якщо запис виразу містить квадратний корінь* $\sqrt{A}$, *то підкореневий вираз* $A\geqslant 0$. У всіх інших випадках, які вам доводилося розглядати, областю визначення виразу були всі дійсні числа[1].

Приклад 2*

Знайдіть область значень функції $y=x^2-3$.

Корисно пам'ятати, що ***область значень функції $y=f(x)$ збігається з множиною тих значень a, при яких рівняння $f(x)=a$ має розв'язки.***

Розв'язання	Коментар
▶ Складаємо рівняння $x^2-3=a$. Воно рівносильне рівнянню $x^2=a+3$, яке має розв'язки, якщо $a+3\geqslant 0$, тобто при $a\geqslant -3$. Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції $E(f)=[-3;+\infty)$ (тобто $y\geqslant -3$). ◁	Позначимо значення заданої функції $f(x)$ (тобто x^2-3) через a і з'ясуємо, для яких a можна знайти відповідне значення x (тобто таке значення x, при якому значення $f(x)=a$). Тоді всі числа a, для яких існує хоча б один корінь рівняння $f(x)=a$, увійдуть до області значень функції $f(x)$. Множина всіх таких a і складе область значень функції $f(x)$.

[1] Надалі в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу ми розглядатимемо нові вирази з обмеженнями: $\mathrm{tg}\,a$, $\mathrm{ctg}\,a$, $\arcsin a$, $\arccos a$, $\sqrt[n]{a}$, a^{α}, де α — неціле число.

Приклад 3 Доведіть, що **при $k \neq 0$ областю значень лінійної функції $y = kx + b$ є множина всіх дійсних чисел.**

Розв'язання	Коментар
Якщо $kx + b = a$ (де $k \neq 0$), то розв'язок цього рівняння $x = \frac{a-b}{k}$ існує для будь-якого $a \in R$ ($k \neq 0$ за умовою). Таким чином, значенням заданої функції може бути будь-яке дійсне число, отже, її область значень $E(f) = R$. ◁	Позначимо значення заданої функції $f(x)$, тобто $kx + b$, через a і з'ясуємо, для яких a можна знайти відповідне значення x таке, що $f(x) = a$. Множина всіх таких значень a і буде складати область значень функції $f(x)$.

Приклад 4* Доведіть, що **лінійна функція $y = kx + b$ при $k > 0$ є зростаючою, а при $k < 0$ — спадною.**

Розв'язання	Коментар
Нехай $x_1 > x_2$, тоді $x_2 - x_1 > 0$. Розглянемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$. Оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то при $k > 0$ маємо $f(x_2) - f(x_1) > 0$, отже, $f(x_2) > f(x_1)$ — функція зростає. При $k < 0$ маємо $f(x_2) - f(x_1) < 0$, отже, $f(x_2) < f(x_1)$ — функція спадає. ◁	Задана функція $f(x) = kx + b$ буде зростаючою, якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливатиме нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, а для доведення останньої нерівності достатньо знайти знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$. Аналогічно обґрунтовують і спадання функції.

Обґрунтовуючи зростання або спадання функції, корисно пам'ятати, що ***для доведення нерівності $f(x_2) > f(x_1)$ чи $f(x_2) < f(x_1)$ достатньо знайти знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$.***

Приклад 5*

Доведіть, що:

1) сума двох зростаючих на множині P функцій завжди є зростаючою функцією на цій множині;

2) сума двох спадних на множині P функцій завжди є спадною функцією на цій множині.

Розв'язання	Коментар
1) Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючими на одній і тій самій множині P. Якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ і $g(x_2) > g(x_1)$. Додаючи почленно останні нерівності, одержуємо $f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1)$. Це й означає, що сума функцій $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючою функцією на множині P. ◁	Для доведення зростання суми двох зростаючих функцій $f(x)$ і $g(x)$ достатньо довести, що на множині P з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1)$.

2) ▶ Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є спадними на множині P. Тоді з нерівності $x_2 > x_1$ маємо: $f(x_2) < f(x_1)$ і $g(x_2) < g(x_1)$. Після почленного додавання останніх нерівностей одержуємо: $f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1)$, а це й означає, що сума функцій $f(x)$ і $g(x)$ є спадною функцією на множині P. ◁

Аналогічно для доведення того, що сума двох спадних функцій є спадною функцією, достатньо довести: якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1)$.

Приклад 6 Доведіть, що **зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.**

Розв'язання

▶ Нехай функція $f(x)$ є зростаючою і $f(x_1) = f(x_2)$. (1)

Припустимо, що $x_1 \neq x_2$.

Якщо $x_1 \neq x_2$, то або $x_1 > x_2$, або $x_1 < x_2$. Враховуючи зростання функції $f(x)$, у випадку $x_1 > x_2$ маємо $f(x_1) > f(x_2)$, що суперечить рівності (1). У випадку $x_1 < x_2$ маємо $f(x_1) < f(x_2)$, що також суперечить рівності (1).

Отже, наше припущення неправильне, і рівність $f(x_1) = f(x_2)$ можлива тільки при $x_1 = x_2$.

Тобто зростаюча функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.

Аналогічно доводиться твердження і для спадної функції. ◁

Коментар

Доведемо це твердження методом від супротивного. Для цього достатньо припустити, що виконується протилежне твердження (функція може набувати одного й того самого значення принаймні у двох точках), і одержати суперечність. Це означатиме, що наше припущення неправильне, а правильним є задане твердження.

Приклад 7 Дослідіть, чи є задана функція парною, непарною або ні парною, ні непарною:

1) $y = \dfrac{1}{x+1}$; 2) $y = x^4$; 3) $y = x^3 + x$.

Розв'язання

1) ▶ Область визначення функції $y = \dfrac{1}{x+1}$: $x \neq -1$, тобто вона не симетрична відносно точки O (точка $x = 1$ входить до області визначення, а $x = -1$ не входить — див. рис. 1.2.11).

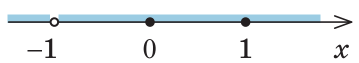


Рис. 1.2.11

Отже, задана функція не може бути ні парною, ні непарною. ◁

2) ▶ Область визначення функції $y = x^4$: $D(y) = \mathbf{R}$, тобто вона симетрична відносно точки O.

$f(-x) = (-x)^4 = f(x)$, отже, функція парна. ◁

3) ▶ Область визначення функції $y = x^3 + x$: $D(y) = \mathbf{R}$, отже, вона симетрична відносно точки O.

$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$, отже, функція непарна. ◁

Коментар

Для дослідження функції $y = f(x)$ на парність чи непарність достатньо, по-перше, упевнитися, що область визначення цієї функції симетрична відносно точки O (разом із кожною точкою x містить і точку $-x$), і по-друге, порівняти значення $f(-x)$ і $f(x)$.

Запитання для контролю

1. Сформулюйте означення числової функції. Наведіть приклади таких функцій.
2. На прикладах поясніть, що таке область визначення функції, область значень функції, найбільше та найменше значення функції на множині M. Які обмеження необхідно врахувати, щоб знайти область визначення функції $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$? Знайдіть її область визначення.
3. Що називається графіком функції $y=f(x)$? Наведіть приклади.
4. Яка функція називається зростаючою? Наведіть приклади.
5. Яка функція називається спадною? Наведіть приклади.
6. Яка функція називається парною? Наведіть приклади. Як розміщено графік парної функції на координатній площині? Наведіть приклади.
7. Яка функція називається непарною? Наведіть приклади. Як розміщено графік непарної функції на координатній площині? Наведіть приклади.

Вправи

1.2.1°. Знайдіть значення функції в указаних точках:

1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ у точках 2; -1; 3; a $(a\neq 0)$;

2) $g(x)=x^2-3$ у точках 0; 1; -2; b;

3) $\varphi(x)=\sqrt{x+1}$ у точках 0; 3; -1; m $(m>0)$.

1.2.2. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

1°) $y=2x+3$;
2°) $y=\sqrt{x+3}$;
3°) $y=\frac{1}{x+1}$;
4) $y=\frac{x}{x^2+1}$;
5) $y=\sqrt{x^2-1}$;
6) $y=\sqrt{x^2+1}$;
7) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$;
8) $y=\frac{\sqrt{x+3}}{x}$;
9*) $y=\sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}}$;
10*) $y=\frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1}$;
11*) $y=\frac{\sqrt{x}}{|x|-2}$;
12*) $y=\sqrt{x^2+x+1}$.

1.2.3. Знайдіть область значень функції, заданої формулою:

1) $f(x)=5$;
2) $f(x)=x$;
3) $f(x)=x^2$;
4) $f(x)=\sqrt{x}$;
5*) $y=-3x+1$;
6*) $y=x^2-5$;
7*) $y=|x|+3$.

1.2.4°. Для функцій, які задано графіками (рис. 1.2.12), укажіть область визначення, область значень, найбільше та найменше значення на всій області визначення, проміжки зростання і спадання та значення кожної функції при $x=1$.

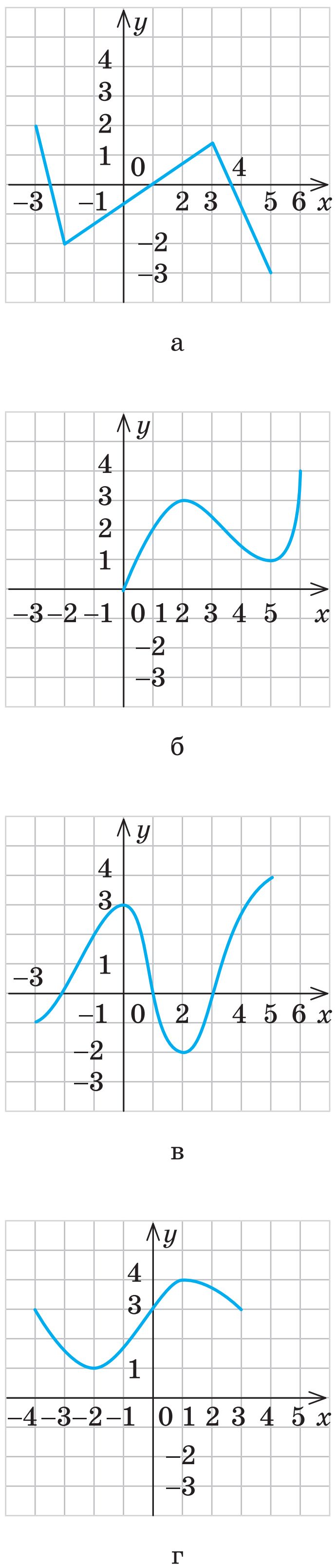


Рис. 1.2.12

1.2.5. Обґрунтуйте, що задана функція є зростаючою (на її області визначення):

1) $y=3x$; 4*) $y=x^5$;

2) $y=x+5$; 5*) $y=\sqrt{x}$.

3*) $y=x^3$;

1.2.6. Доведіть, що на заданому проміжку функція зростає:

1) $y=-\dfrac{2}{x}$, де $x>0$; 2) $y=-\dfrac{1}{x}$, де $x<0$.

1.2.7. Обґрунтуйте, що задана функція є спадною (на її області визначення):

1) $y=-3x$; 3*) $y=-x^3$;

2) $y=-x-1$; 4*) $y=-x^5$.

1.2.8. Доведіть, що на заданому проміжку функція спадає:

1) $y=\dfrac{3}{x}$, де $x<0$; 2) $y=\dfrac{5}{x}$, де $x>0$.

1.2.9. Доведіть, що функція $y=x^2$ на проміжку $[0;+\infty)$ зростає, а на проміжку $(-\infty;0]$ спадає.

1.2.10. Користуючись твердженнями, доведеними у прикладі 5 до п. 1.2, визначте, чи є задана функція зростаючою або спадною:

1) $y=x^3+x$; 3) $y=x+\sqrt{x}$;

2) $y=-x-x^5$; 4) $y=-x^3-x^5$.

1.2.11*. Користуючись твердженнями, доведеними у прикладі 6 до п. 1.2:

1) обґрунтуйте, що рівняння $x^3+x=10$ має єдиний корінь $x=2$;

2) підберіть корінь рівняння $\sqrt{x}+x=6$ і доведіть, що інших коренів це рівняння не має.

1.2.12. Обґрунтуйте, що задана функція є парною:

1) $y=x^6$; 3) $y=\sqrt{x^2+1}$;

2) $y=\dfrac{1}{x^2}+1$; 4) $y=\sqrt{|x|+x^4}$.

1.2.13. Обґрунтуйте, що задана функція є непарною:

1) $y=x^5$; 3) $y=x|x|$;

2) $y=-\dfrac{1}{x^3}$; 4) $y=x^3-x$.

Виявіть свою компетентність

1.2.14. Медичними працівниками встановлено, що дитина віком а років $a<18$ для нормального розвитку повинна спати протягом t год на добу, де t визначається за формулою $t=16-\frac{a}{2}$. Знайдіть $t(16), t(15), t(14)$.

1.2.15. На рис. 1.2.13 зображено графіки зміни розумової працездатності учнів залежно від тривалості сну, наведені в підручнику для медичних вишів. Охарактеризуйте за кожним графіком, як змінюється кількість правильно розв'язаних завдань (у %) з 8 до 12 год однієї доби. Які висновки ви можете зробити?

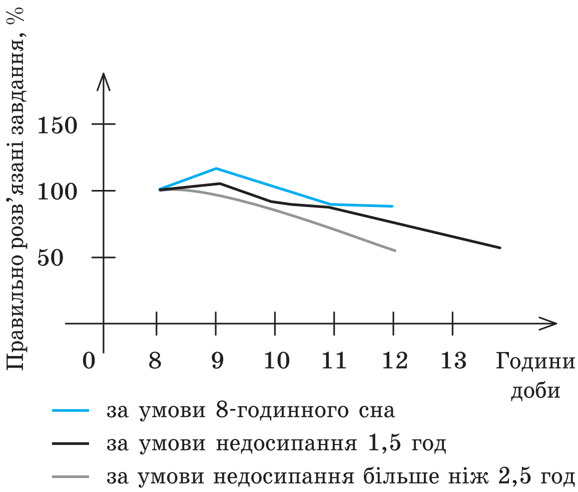
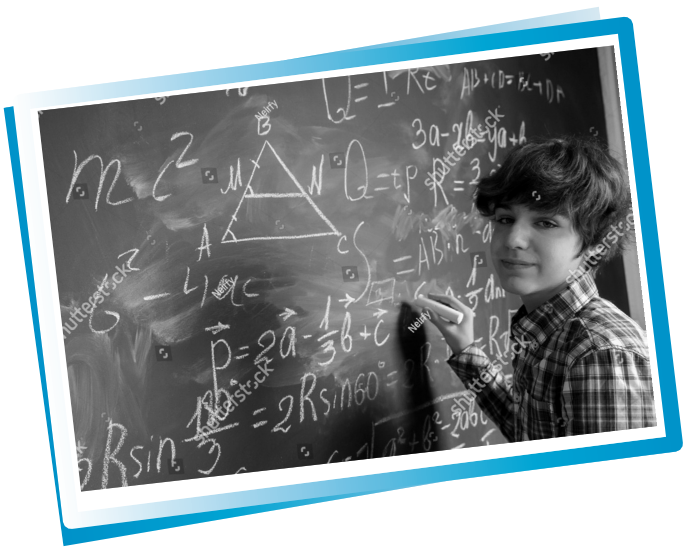
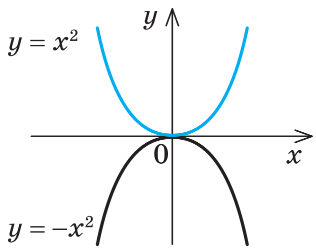
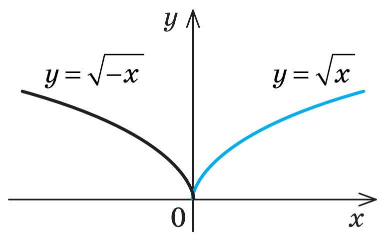
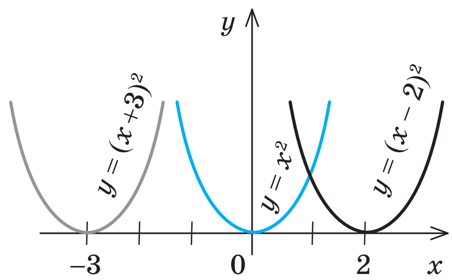
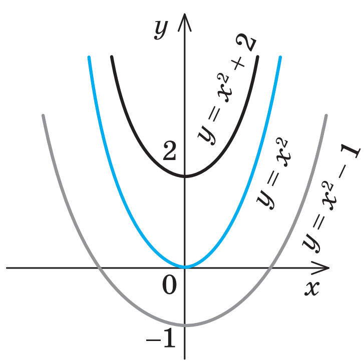


Рис. 1.2.13

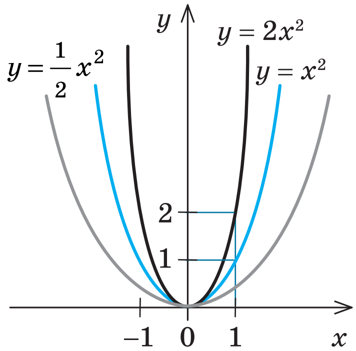
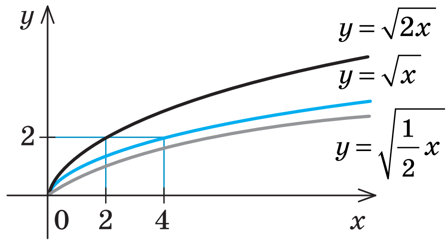
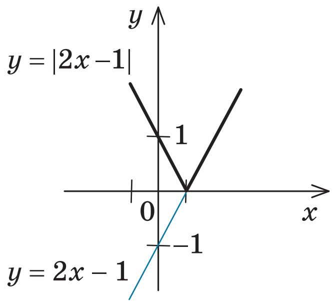
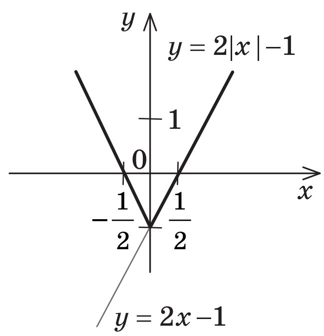


1.3. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій

Таблиця 3

Перетворення графіка функції $y = f(x)$			
№	Формула залежності	Приклад	Перетворення
1	2	3	4
1	$y = -f(x)$		Симетрія відносно осі Ox
2	$y = f(-x)$		Симетрія відносно осі Oy
3	$y = f(x - a)$		Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць
4	$y = f(x) + c$		Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Oy на c одиниць

Продовження таблиці 3

5	$y=kf(x)$ $(k>0)$		Розтяг або стиск графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Oy (при $k>1$ розтяг, при $0<k<1$ стиск)
6	$y=f(\alpha x)$ $(\alpha>0)$		Розтяг або стиск графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Ox (при $\alpha>1$ стиск, при $0<\alpha<1$ розтяг)
7	$y=\lvert f(x)\rvert$		Вище від осі Ox (і на самій осі) графік функції $y=f(x)$ без зміни, нижче від осі Ox — симетрія відносно осі Ox
8	$y=f(\lvert x\rvert)$		Праворуч від осі Oy (і на самій осі) графік функції $y=f(x)$ без зміни і та сама частина графіка — симетрія відносно осі Oy

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Розглянемо способи побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій.

1 Побудова графіка функції $y=-f(x)$

Порівняємо графіки функцій $y=x^2$ та $y=-x^2$ (див. перший рядок табл. 3). Очевидно, що графік функції $y=-x^2$ можна одержати з графіка функції $y=x^2$ симетричним відображенням його відносно осі Ox. Покажемо, що графік функції $y=-f(x)$ завжди можна одержати з графіка функції $y=f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Ox.

Дійсно, за означенням графік функції $y=f(x)$ складається з усіх точок M координатної площини, які мають координати $(x;y)=(x;f(x))$. Тоді графік функції $y=-f(x)$ складається з усіх точок K координатної площини, які мають координати $(x;y)=(x;-f(x))$.

Точки $M(x;f(x))$ і $K(x;-f(x))$ розміщені на координатній площині симетрично відносно осі Ox (рис. 1.3.1). Отже, кожна точка K графіка функції $y=-f(x)$ одержується симетричним відображенням відносно осі Ox деякої точки M графіка функції $y=f(x)$. Тому ***графік функції $y=-f(x)$ можна одержати з графіка функції $y=f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Ox.***

Ця властивість дозволяє легко обґрунтувати побудову графіка функції $y=|f(x)|$.

Маємо:

$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) \text{ при } f(x)\geqslant 0 \\ \qquad \text{(графік не змінюється);} \\ -f(x) \text{ при } f(x)<0 \\ \qquad \text{(симетрія відносно осі } Ox\text{).} \end{cases}$$

Отже, ***графік функції $y=|f(x)|$ може бути побудований так: частина графіка функції $y=f(x)$, яка лежить вище від осі Ox (і на самій осі), залишається без зміни, а та частина, яка лежить нижче від осі Ox, відображується симетрично відносно цієї осі.***

Наприклад, на рис. 1.3.2 і в табл. 3 (сьомий рядок) зображено графік функції $y=|2x-1|$, побудований із використанням цього правила.

2 Побудова графіка функції $y=f(-x)$

Для побудови графіка функції $y=f(-x)$ урахуємо, що в означенні графіка функції перша координата точок графіка вибирається довільно з області визначення функції. Якщо вибрати як першу координату $(-x)$, то графік функції $y=f(-x)$ складатиметься з усіх точок T координатної площини з координатами $(-x;y)=(-x;f(x))$, а графік функції $y=f(x)$ — з усіх точок $M(x;f(x))$.

Точки $M(x;f(x))$ і $T(-x;f(x))$ розміщено на координатній площині симетрично відносно осі Oy (рис. 1.3.3).

Отже, кожна точка T графіка функції $y=f(-x)$ одержується симетричним

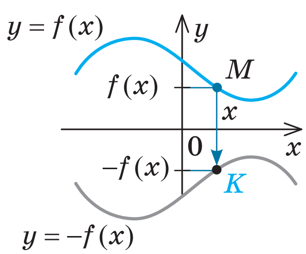


Рис. 1.3.1

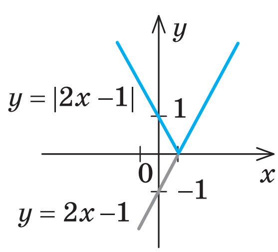


Рис. 1.3.2

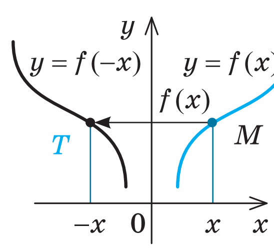


Рис. 1.3.3

відображенням відносно осі Oy деякої точки M графіка функції $y=f(x)$. Тому ***графік функції $y=f(-x)$ можна одержати з графіка функції $y=f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Oy.***

Ця властивість дозволяє легко обґрунтувати побудову графіка функції $y=f(|x|)$. Маємо:

$$y=f(|x|)=\begin{cases} f(x) \text{ при } x\geqslant 0 \\ \qquad \text{(графік не змінюється)}; \\ f(-x) \text{ при } x<0 \\ \qquad \text{(симетрія відносно осі } Oy\text{)}. \end{cases}$$

Інакше кажучи, для того щоб отримати графік $y=f(|x|)$ при $x<0$ (тобто ліворуч від осі Oy), потрібно відобразити симетрично відносно осі Oy ту частину графіка функції $y=f(x)$, яка лежить праворуч від осі Oy. Таким чином, частину графіка функції $y=f(x)$, яка розташована ліворуч від осі Oy, узагалі не використовують у побудові графіка функції $y=f(|x|)$. Отже, ***графік функції $y=f(|x|)$ будують так: частину графіка функції $y=f(x)$, яка лежить праворуч від осі Oy (і на самій осі), залишають без зміни і саме цю частину відображують симетрично відносно осі Oy.***

Наприклад, на рис. 1.3.4 та в табл. 3 (восьмий рядок) зображено графік функції $y=2|x|-1$, побудований із використанням цього правила.

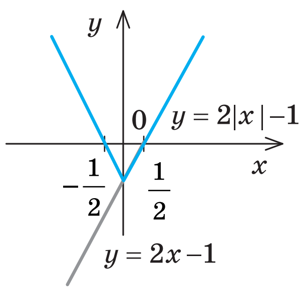


Рис. 1.3.4

3 Побудова графіка функції $y=f(x-a)$

Для того щоб побудувати графік функції $y=f(x-a)$, виберемо як першу координату точки N цього графіка значення $x+a$. Тоді графік функції $y=f(x-a)$ складається з усіх точок N координатної площини з координатами $(x+a;y)=(x+a;f(x+a-a))=(x+a;f(x))$, а графік функції $y=f(x)$ — з усіх точок $M(x;f(x))$.

Якщо точка M має координати $(x;y)$, а точка N — координати $(x+a;y)$, то перетворення точок $(x;y)\to(x+a;y)$ — це паралельне перенесення точки M уздовж осі Ox на a одиниць (тобто на вектор $\overline{(a;0)}$).

Оскільки кожну точку N графіка функції $y=f(x-a)$ одержують паралельним перенесенням деякої точки M графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць (рис. 1.3.5), то ***графік функції $y=f(x-a)$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць.***

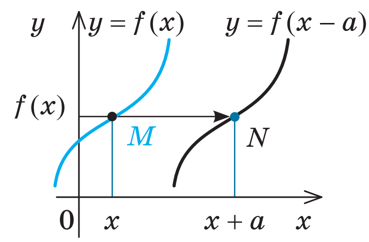


Рис. 1.3.5

Наприклад, у третьому рядку табл. 3 зображено графік функції $y=(x-2)^2$ (виконано паралельне перенесення графіка $y=x^2$ на $+2$ одиниці вздовж осі Ox) та графік функції $y=(x+3)^2$ (виконано паралельне перенесення графіка $y=x^2$ на -3 одиниці вздовж осі Ox).

4 Побудова графіка функції $y=f(x)+b$

Графік функції $y=f(x)+b$ складається з усіх точок A координатної площини з координатами $(x;y)=(x;f(x)+b)$, а графік функції $y=f(x)$ — з усіх точок $M(x;f(x))$.

Але якщо точка M має координати $(x;y)$, а точка A — координати $(x;y+b)$,

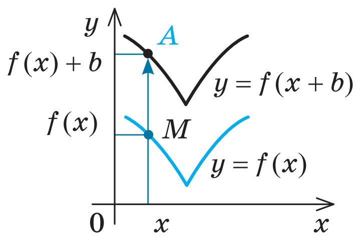


Рис. 1.3.6

то перетворення точок $(x;y)\to(x;y+b)$ — це паралельне перенесення точки M уздовж осі Oy на b одиниць (тобто на вектор $\overline{(0;b)}$).

Оскільки кожна точка A графіка функції $y=f(x)+b$ одержується паралельним перенесенням деякої точки M графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Oy на b одиниць (рис. 1.3.6), то ***графік функції $y=f(x)+b$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Oy на b одиниць.***

Наприклад, у четвертому рядку табл. 3 зображено графік функції $y=x^2+2$ (виконано паралельне перенесення графіка функції $y=x^2$ на $+2$ одиниці вздовж осі Oy) та графік функції $y=x^2-1$ (виконано паралельне перенесення графіка функції $y=x^2$ на -1 уздовж осі Oy).

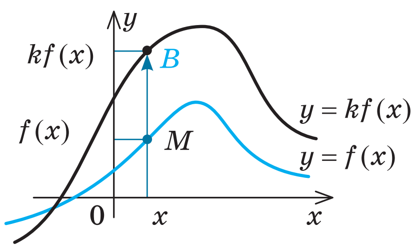


Рис. 1.3.7

5 Побудова графіка функції $y=kf(x)$

Графік функції $y=kf(x)$ $(k>0)$ складається з усіх точок $B(x;kf(x))$, а графік функції $y=f(x)$ — з усіх точок $M(x;f(x))$ (рис. 1.3.7).

Назвемо *перетворенням розтягу вздовж осі Oy із коефіцієнтом k* (де $k>0$) таке перетворення фігури F, при якому кожна її точка $(x;y)$ переходить у точку $(x;ky)$.

Перетворення розтягу вздовж осі Oy задають формулами: $x'=x$; $y'=ky$. Ці формули виражають координати $(x';y')$ точки M', у яку переходить точка $M(x;y)$ при перетворенні розтягу вздовж осі Oy (рис. 1.3.8). При цьому відбувається розтягування відрізка AM у k разів. Зауважимо, що іноді вказане перетворення графіка функції $y=f(x)$ називають *розтягом* тільки *при* $k>1$, а при $0<k<1$ його називають *стиском уздовж осі Oy* в $\frac{1}{k}$ разів.

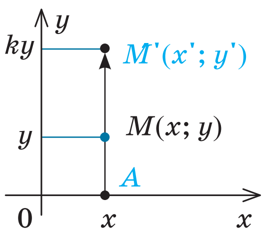


Рис. 1.3.8

Як бачимо, кожна точка B графіка функції $y=kf(x)$ одержується з точки M перетворенням розтягу вздовж осі Oy (див. рис. 1.3.7). При цьому загальна форма графіка не змінюється: він розтягується або стискається вздовж осі Oy. Наприклад, якщо графіком функції $y=f(x)$ була парабола, то після розтягування або стискання графік залишається параболою. Тому ***графік функції $y=kf(x)$ $(k>0)$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ його розтягуванням (при $k>1$ розтяг у k разів) або стисканням (при $0<k<1$ стиск у $\frac{1}{k}$ разів) уздовж осі Oy.***

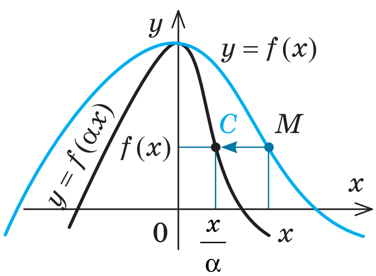


Рис. 1.3.9

6 Побудова графіка функції $y = f(\alpha x)$

Для побудови графіка функції $y=f(\alpha x)$ $(\alpha>0)$ виберемо як першу координату точки C цього графіка значення $\frac{x}{\alpha}$. Тоді графік функції $y=f(\alpha x)$ складатиметься з усіх точок C з координатами $\left(\frac{x}{\alpha};y\right)=\left(\frac{x}{\alpha};f\left(\alpha\frac{x}{\alpha}\right)\right)=\left(\frac{x}{\alpha};f(x)\right)$, а графік функції $y=f(x)$ — з усіх точок $M(x;f(x))$ (рис. 1.3.9).

Назвемо *перетворенням розтягу вздовж осі Ox із коефіцієнтом* α (де $\alpha>0$) таке перетворення фігури F, при якому кожна її точка $(x;y)$ переходить у точку $(\alpha x;y)$.

Перетворення розтягу вздовж осі Ox задається формулами: $x'=\alpha x$; $y'=y$. Ці формули виражають координати $(x';y')$ точки M', у яку переходить точка $M(x;y)$ при перетворенні розтягу вздовж осі Ox (рис. 1.3.10). При цьому перетворенні відбувається розтягування відрізка BM в α разів. Зауважимо, що іноді вказане перетворення називають розтягом (у $\frac{1}{\alpha}$ разів) тільки при $0<\alpha<1$, а при $\alpha>1$ його називають *стиском уздовж осі Ox* (у α разів). Як бачимо, кожна точка C графіка функції $y=f(\alpha x)$ одержується з точки M графіка функції $y=f(x)$ (див. рис. 1.3.9) перетворенням розтягу вздовж осі Ox (при цьому загальна форма графіка не змінюється). Тому ***графік функції*** $y=f(\alpha x)$ $\alpha>0$ ***одержується з графіка функції*** $y=f(x)$ ***його розтягуванням (при*** $0<\alpha<1$ ***розтяг в*** $\frac{1}{\alpha}$ ***разів) або стисканням (при*** $\alpha>1$ ***стиск в*** α ***разів) уздовж осі Ox.***

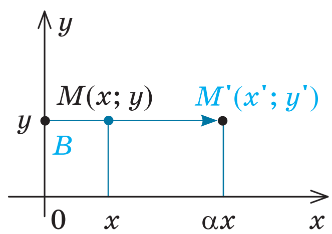
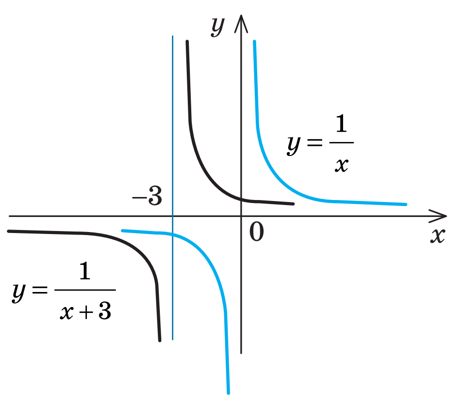


Рис. 1.3.10

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Побудуйте графік функції $y=\frac{1}{x+3}$.

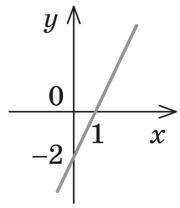
Розв'язання	Коментар
	Ми можемо побудувати графік функції $y=f(x)=\frac{1}{x}$. Тоді графік функції $y=\frac{1}{x+3}=f(x+3)=f(x-(-3))$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Ox на -3 одиниці (тобто вліво).

Приклад 2 Побудуйте графік функції $y=-|2x-2|$.

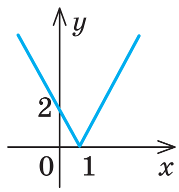
Розв'язання

Послідовно будуємо графіки:

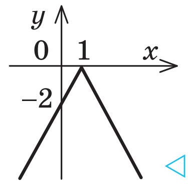
1. $y=2x-2$



2. $y=|2x-2|$



3. $y=-|2x-2|$



◁

Коментар

Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції.

1. Ми можемо побудувати графік функції $y=f(x)=2x-2$ (пряма).
2. Потім можна побудувати графік функції $y=\varphi(x)=|2x-2|=|f(x)|$ (вище від осі Ox графік функції $y=2x-2$ залишається без зміни, а частина графіка, розташована нижче від осі Ox, відображається симетрично відносно осі Ox).
3. Після цього можна побудувати графік функції $y=-|2x-2|=-\varphi(x)$ (симетричний графіку функції $y=\varphi(x)$ відносно осі Ox).

Приклад 3 Побудуйте графік функції $y=\sqrt{4-|x|}$.

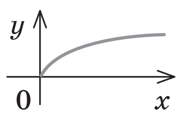
Розв'язання

Запишемо рівняння заданої функції так:

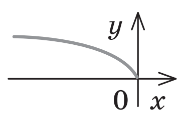
$$y=\sqrt{4-|x|}=\sqrt{-(|x|-4)}.$$

Послідовно будуємо графіки:

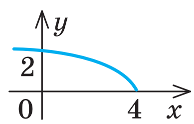
1. $y=\sqrt{x}$



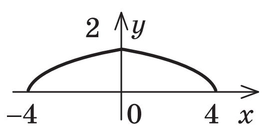
2. $y=\sqrt{-x}$



3. $y=\sqrt{-(x-4)}$



4. $y=\sqrt{-(|x|-4)}$



◁

Коментар

Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції. (Для того щоб можна було скористатися перетвореннями графіків, наведеними в табл. 3, підкореневий вираз функції запишемо так: $y=\sqrt{-(|x|-4)}$.)

1. Ми можемо побудувати графік функції $y=f(x)=\sqrt{x}$.
2. Потім можна побудувати графік функції $y=g(x)=\sqrt{-x}=f(-x)$ (симетрія графіка функції $f(x)$ відносно осі Oy).
3. Після цього можна побудувати графік функції $y=\varphi(x)=\sqrt{-(x-4)}=g(x-4)$ (паралельне перенесення графіка функції $g(x)$ уздовж осі Ox на 4 одиниці).
4. Потім уже можна побудувати графік заданої функції $y=\sqrt{-(|x|-4)}=\varphi(|x|)=\sqrt{4-|x|}$ (праворуч від осі Oy відповідна частина графіка функції $y=\varphi(x)$ залишається без зміни, і та сама частина відображується симетрично відносно осі Oy).

Запитання для контролю

1. На прикладах поясніть, як можна з графіка функції $y=f(x)$ одержати графік функції:

1) $y=-f(x)$;
2) $y=f(-x)$;
3) $y=f(x-a)$;
4) $y=f(x)+c$;
5) $y=kf(x)$, де $k>0$;
6) $y=f(\alpha x)$, де $\alpha>0$;
7) $y=|f(x)|$;
8) $y=f(|x|)$.

2*. Обґрунтуйте геометричні перетворення, за допомогою яких із графіка функції $y=f(x)$ можна одержати графіки вказаних вище функцій.

Вправи

У завданнях 1.3.1–1.3.7 побудуйте графіки функцій та рівнянь.

1.3.1. 1) $y=|x-5|$; 2) $y=|x|-5$; 3) $y=||x|-5|$; 4*) $|y|=x-5$.

1.3.2. 1) $y=x^2-9$; 2) $y=|x^2-9|$; 3) $y=|x^2|-9$; 4*) $|y|=x^2-9$.

1.3.3. 1) $y=(x+1)^2$; 2) $y=(|x|+1)^2$; 3) $y=(x+1)^2-3$; 4) $y=|(x+1)^2-3|$.

1.3.4. 1) $y=\frac{1}{x+2}$; 2) $y=\left|\frac{1}{x+2}\right|$; 3) $y=\frac{1}{|x|+2}$; 4*) $|y|=\frac{1}{x+2}$.

1.3.5. 1) $y=-\frac{2}{x}$; 2) $y=3-\frac{2}{x}$; 3) $y=-\frac{2}{x-1}$; 4) $y=-\frac{2}{|x|}$.

1.3.6. 1) $y=\sqrt{x-3}$; 3) $y=\sqrt{|x|-3}$; 5) $y=\left|\sqrt{|x|}-3\right|$; 7*) $|y|=\sqrt{x}-3$.
2) $y=\sqrt{x}-3$; 4) $y=\left|\sqrt{x}-3\right|$; 6*) $|y|=\sqrt{x-3}$;

1.3.7. 1) $y=-\sqrt{x}$; 2) $y=-\sqrt{x}+4$; 3) $y=-\sqrt{|x|}$; 4) $y=-\sqrt{x-1}$.

1.3.8. Функція $y=f(x)$ задана на проміжку $[0;14]$, її графік зображений на рис. 1.3.11. Побудуйте графік функції або рівняння:

1) $y=-f(x)$; 4) $y=f(|x|)$; 7) $y=\frac{1}{2}f(x)$; 10*) $|y|=f(|x|)$.
2) $y=f(-x)$; 5) $y=2f(x)$; 8*) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$;
3) $y=|f(x)|$; 6*) $y=f(2x)$; 9*) $|y|=f(x)$;

1.3.9. Виконайте завдання вправи 1.3.8 для функції $y=f(x)$, заданої на проміжку $[-14;0]$, графік якої зображено на рис. 1.3.12.

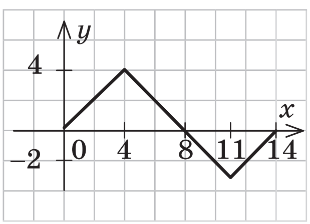


Рис. 1.3.11

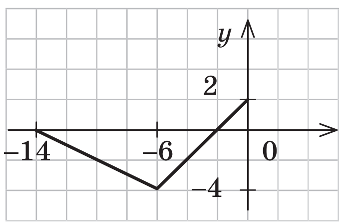


Рис. 1.3.12

Виявіть свою компетентність

1.3.10. На рис. 1.3.13 зображено графіки зміни розумової працездатності учнів залежно від тривалості активного відпочинку на свіжому повітрі, наведені в підручнику для медичних вишів. Охарактеризуйте за кожним графіком, як змінюється кількість правильно розв'язаних завдань (у %) з 8 до 20 год однієї доби. Які висновки ви можете зробити?

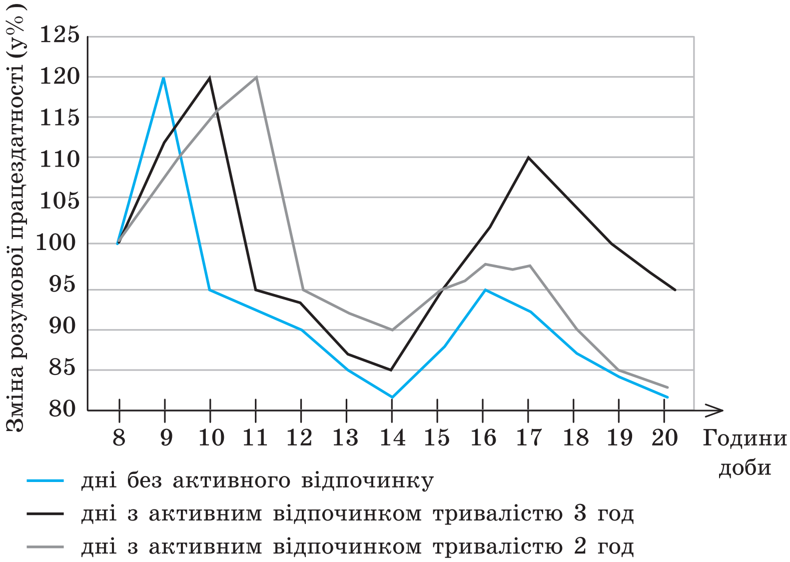


Рис. 1.3.13

1.3.11. На графіках (рис. 1.3.14) проілюстровано залежність світлового потоку різних типів ламп від їх потужності. Оцініть потужність світлодіодної лампи, необхідну для отримання такого самого світлового потоку, як від лампи розжарювання потужністю 100 Вт.

Знайдіть у мережі Інтернет вартість лампи розжарювання, вартість відповідної світлодіодної лампи і вартість 1 кВт-год електроенергії та підрахуйте, за який час окупиться заміна лампи розжарювання світлодіодною лампою, якщо вони працюватимуть по 6 год на день. Врахуйте, що лампа розжарювання розрахована на 1000 год роботи, а світлодіодна — на 20 000 год.

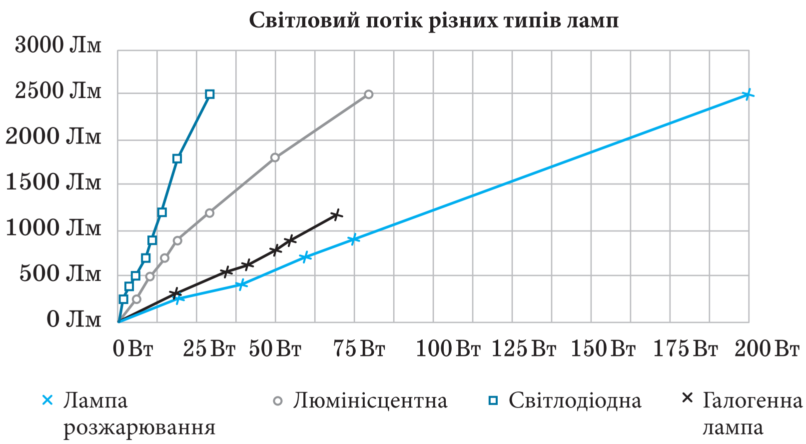
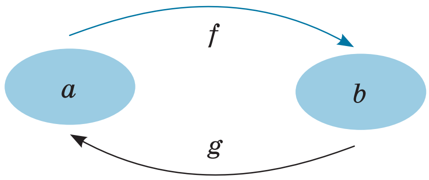


Рис. 1.3.14

1.4. Обернена функція

Таблиця 4

1. Поняття оберненої функції

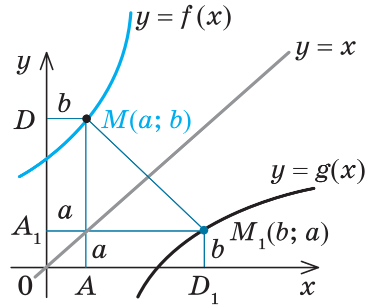


Функції $f(x)$ і $g(x)$ взаємно обернені

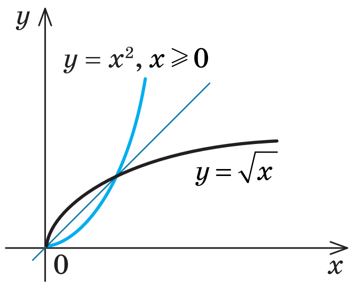
Якщо функція $y=f(x)$ набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення, то можна задати функцію $y=g(x)$, яка називається *оберненою до функції* $y=f(x)$: для кожного $a\in D(f)$, якщо $f(a)=b$, то $g(b)=a$.

$E(f)=D(g)$; $D(f)=E(g)$.

2. Властивості оберненої функції



1) Графіки прямої та оберненої функцій симетричні відносно прямої $y=x$



2) Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона має обернену функцію на цьому проміжку, яка зростає, якщо $f(x)$ зростає, і спадає, якщо $f(x)$ спадає

3. Практичний спосіб знаходження формули функції, оберненої до функції $y=f(x)$

Алгоритм	Приклад
1. З'ясувати, чи буде функція $y=f(x)$ оборотною на всій області визначення: для цього достатньо з'ясувати, чи має рівняння $y=f(x)$ єдиний корінь відносно змінної x. **Якщо ні, то виділити (якщо можливо) проміжок, де існує обернена функція** (наприклад, це може бути проміжок, де функція $y=f(x)$ зростає або спадає). **2. Із рівності $y=f(x)$ виразити x через y.** **3. В одержаній формулі ввести традиційні позначення — аргумент позначити через x, а функцію — через y.**	Знайдіть функцію, обернену до функції $y=2x+4$. ▶ Із рівності $y=2x+4$ можна однозначно виразити x через y: $x=\frac{1}{2}y-2$. Ця формула задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x. Позначимо в одержаній формулі аргумент через x, а функцію — через y. Маємо функцію $y=\frac{1}{2}x-2$, обернену до функції $y=2x+4$. ◁

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття оберненої функції

Відомо, що залежність шляху від часу для тіла, яке рухається рівномірно з постійною швидкістю v_0, виражається формулою $s = v_0 t$. Із цієї формули можна знайти обернену залежність — часу від пройденого шляху: $t = \frac{s}{v_0}$. Функцію $t(s) = \frac{s}{v_0}$ називають *оберненою до функції* $s(t) = v_0 t$. Зазначимо, що в розглянутому прикладі кожному значенню t $(t \geqslant 0)$ відповідає єдине значення s і, навпаки, кожному значенню s $(s \geqslant 0)$ відповідає єдине значення t.

Розглянемо процедуру одержання оберненої функції в загальному вигляді.

Нехай функція $f(x)$ набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення (така функція називається ***оборотною***). Тоді для кожного числа $y_0 = b$ (з області значень функції $f(x)$) існує єдине значення $x_0 = a$ таке, що $f(a) = b$. Розглянемо нову функцію $g(x)$, яка кожному числу b з області значень функції $f(x)$ ставить у відповідність число a, тобто $g(b) = a$ для кожного b з області значень функції $f(x)$. У цьому випадку функція $g(x)$ називається ***оберненою*** до функції $f(x)$, а функція $f(x)$ — ***оберненою*** до функції $g(x)$.

! Із курсу геометрії вам відомо поняття «обернена теорема». Спробуйте провести аналогію між поняттями «обернена функція» і «обернена теорема».

Із процедури одержання оберненої функції випливає, що область значень прямої функції $E(f)$ є областю визначення оберненої функції $D(g)$, а область визначення прямої функції $D(f)$ є областю значень оберненої функції $E(g)$.

Отже, $E(f) = D(g)$, $D(f) = E(g)$.

2 Властивості оберненої функції

Властивість 1. ***Графіки прямої і оберненої функцій симетричні відносно прямої $y = x$.***

Ураховуючи наведену вище процедуру одержання функції, оберненої до функції $y = f(x)$, маємо: якщо $f(a) = b$, то за означенням графіка функції точка M із координатами $(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$.

Аналогічно, оскільки $g(b) = a$, то точка з координатами $(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$. Точки $M(a; b)$ і $M_1(b; a)$ розміщені на координатній площині симетрично відносно прямої $y = x$ (рис. 1.4.1).

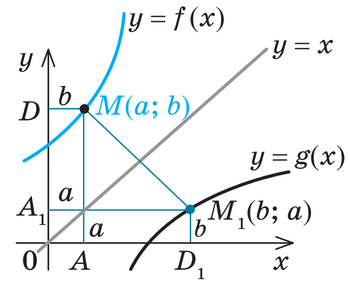


Рис. 1.4.1

Дійсно, пряма $y = x$ є віссю симетрії системи координат. Отже, при симетрії відносно прямої $y = x$ вісь Ox відображається на вісь Oy, а вісь Oy — на вісь Ox. Тоді (наприклад, при $a > 0$ і $b > 0$) прямокутник $OAMD$ із сторонами $OA = a$ і $OD = b$ на осях координат відображається у прямокутник OA_1M_1D зі сторонами на осях координат, у якого $OA_1 = OA = a$ і $OD_1 = OD = b$. Таким чином, унаслідок симетрії відносно прямої $y = x$ точка $M(a; b)$ відображається в точку $M_1(b; a)$ (а точка M_1 — у точку M). Отже, внаслідок симетрії відносно прямої $y = x$ будь-яка точка $M(a; b)$, що належить графіку функції $y = f(x)$, має відповідну точку $M_1(b; a)$, яка належить графіку функції $y = g(x)$, а будь-яка точка $M_1(b; a)$, що належить графіку функції $y = g(x)$, має відповідну точку $M(a; b)$, яка належить графіку функції $y = f(x)$. Отримуємо, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. ○

Властивість 2. ***Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона має обернену функцію на цьому проміжку, яка зростає, якщо $f(x)$ зростає, і спадає, якщо $f(x)$ спадає.***

Дійсно, якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то за властивістю зростаючої (спадної) функції кожного свого значення вона набуває в єдиній точці з цього проміжку (див. приклад 6 до п. 1.2.), отже, вона має обернену функцію $g(x)$ на цьому проміжку. Обґрунтувати, що функція $g(x)$ зростає, якщо $f(x)$ зростає, можна методом від супротивного.

Нехай числа a_1 і a_2 входять до області визначення функції $f(x)$ і

$$a_2 > a_1. \quad (1)$$

Позначимо $f(a_1)=b_1$, $f(a_2)=b_2$. Якщо функція $f(x)$ зростає, то $f(a_2)>f(a_1)$, тобто $b_2>b_1$. За означенням оберненої функції $g(x)$ числа b_1 і b_2 входять до її області визначення і

$$g(b_1)=a_1, \quad g(b_2)=a_2. \quad (2)$$

Якщо припустити, що функція $g(x)$ не є зростаючою, то з нерівності $b_2>b_1$ не може випливати нерівність $g(b_2)>g(b_1)$ (інакше функція $g(x)$ буде зростаючою), отже, може виконуватися тільки нерівність $g(b_2)\leqslant g(b_1)$. Але тоді за формулами (2) одержуємо: $a_2\leqslant a_1$, що суперечить умові (1). Отже, наше припущення неправильне, і функція $g(x)$ зростає, якщо $f(x)$ зростає.

Аналогічно обґрунтовується, що у випадку, коли функція $f(x)$ спадає, обернена до неї функція $g(x)$ теж спадає. ○

3 Практичний спосіб знаходження формули функції, оберненої до функції $y=f(x)$

Із процедури одержання оберненої функції випливає, що для отримання оберненої залежності (яка і буде задавати обернену функцію) необхідно знати, як значення x виражається через значення y. Це можна зробити, розв'язавши рівняння $y=f(x)$ відносно змінної x. Якщо задана функція оборотна, то рівняння матиме єдиний розв'язок для всіх y із області значень функції $f(x)$, і ми одержимо формулу $x=g(y)$, яка задає обернену функцію. Але в цій формулі аргумент позначено через y, а функцію — через x. Якщо поміняти позначення на традиційні, то одержимо запис функції, оберненої до функції $y=f(x)$.

Ці міркування разом із відповідним алгоритмом наведено в табл. 4 і реалізовано в прикладах, наведених нижче.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Знайдіть функцію, обернену до функції $y=\frac{1}{x-1}$.

Розв'язання	Коментар
▶ Область визначення: $x\neq1$. Тоді з рівності $y=\frac{1}{x-1}$ маємо: $xy-y=1$, $xy=y+1$, $x=\frac{y+1}{y}$. Позначаємо аргумент через x, а функцію — через y і одержуємо функцію $y=\frac{x+1}{x}$, обернену до заданої. ◁	На всій області визначення $(x\neq1)$ задана функція оборотна, оскільки з рівняння $y=\frac{1}{x-y}$ можна однозначно виразити x через y ($y\neq0$ на області значень заданої функції). Одержана формула $x=\frac{y+1}{y}$ задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x. Змінюючи позначення на традиційні, одержуємо кінцевий результат.

Приклад 2 Знайдіть функцію, обернену до функції $y=x^2$.

Розв'язання	Коментар
▶ Із рівності $y=x^2$ при $y\geqslant 0$ одержуємо $x=\pm\sqrt{y}$. Тоді при $y>0$ одному значенню y відповідають два значення x. Отже, на всій області визначення $x\in(-\infty;+\infty)$ функція $y=x^2$ не є оборотною, і для неї неможливо знайти обернену функцію. ◁	Область значень заданої функції $y\geqslant 0$. Але при $y>0$ з рівності $y=x^2$ не можна однозначно виразити x через y. Наприклад, при $y=4$ одержуємо $x=\pm 2$. Через це ми не можемо значенню $y=4$ поставити у відповідність єдине число, щоб побудувати обернену функцію.

Приклад 3 Знайдіть функцію, обернену до функції $y=x^2$ при $x\geqslant 0$.

Розв'язання	Коментар
▶ Із рівності $y=x^2$ при $y\geqslant 0$ одержуємо $x=\pm\sqrt{y}$. Ураховуючи, що за умовою $x\geqslant 0$, маємо $x=\sqrt{y}$. Позначимо аргумент через x, а функцію — через y і одержимо, що функцією, оберненою до функції $y=x^2$, яка задана тільки при $x\geqslant 0$, буде функція $y=\sqrt{x}$. ◁	Множина значень заданої функції: $y\geqslant 0$. При $x\geqslant 0$ задана функція $y=x^2$ зростає, отже, на проміжку $x\geqslant 0$ вона має обернену функцію. Тому на цьому проміжку ми зможемо однозначно розв'язати рівняння $x^2=y$: при $x\geqslant 0$ маємо $x=\sqrt{y}$. Ця формула задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x. Замінюючи позначення на традиційні, одержуємо кінцевий результат.

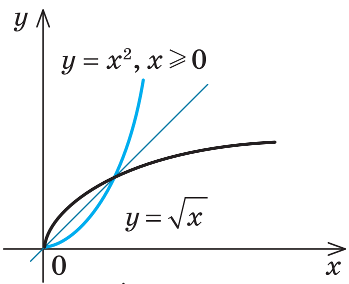


Рис. 1.4.2

Зауваження. У прикладах 2 і 3 ми фактично розглядаємо різні функції (вони мають різні області визначення), хоча в обох випадках ці функції задаються однією й тією самою формулою. Як відомо, графіком функції $y=x^2$ (приклад 2) є парабола, а графіком функції $y=x^2$ при $x\geqslant 0$ (приклад 3) є тільки права вітка цієї параболи (рис. 1.4.2).

Запитання для контролю

1. За якої умови для заданої функції $y=f(x)$ можна побудувати обернену функцію?
2. Поясніть побудову графіка оберненої функції на прикладі функції $y=f(x)$, яка задана таблицею:

x	0	2	4	6
$f(x)$	1	3	5	7

Задайте функцію $y=g(x)$, обернену до функції $y=f(x)$, за допомогою таблиці:

x				
$g(x)$				

3. Як розміщено графіки прямої і оберненої функцій, якщо їх побудовано в одній системі координат? Проілюструйте відповідну властивість графіків на прикладі.
4. Обґрунтуйте взаємне розміщення графіків прямої і оберненої функцій.
5. Чи існує функція, обернена до функції $y=x^2$, де $x\leqslant 0$? Поясніть це, спираючись на відповідні властивості оберненої функції. Якщо обернена функція існує, то задайте її формулою вигляду $y=g(x)$.

Вправи

1.4.1. Запишіть формулу, яка задає функцію $y=g(x)$, обернену до заданої. Укажіть область визначення і множину значень функції $g(x)$:

1°) $y=3x-6$; 2°) $y=-3x-6$; 3) $y=\frac{2}{x}$; 4) $y=-\frac{1}{x}$; 5) $y=\sqrt{x}$.

1.4.2. На одному рисунку побудуйте графік даної функції і функції, оберненої до даної:

1°) $y=2x$; 2°) $y=x-2$; 3) $y=-\frac{1}{x}$; 4*) $y=\frac{1}{x-1}$; 5*) $y=\sqrt{x+1}$.

1.4.3. Знайдіть функцію, обернену до даної на заданому проміжку, і побудуйте на одному рисунку графік даної функції і функції, оберненої до неї:

1) $y=\frac{1}{4}x^2$ при $x\geqslant 0$; 2) $y=\frac{1}{4}x^2$ при $x\leqslant 0$; 3) $y=(x-2)^2$ при $x\geqslant 2$; 4) $y=x^2-2$ при $x\leqslant 0$.

Виявіть свою компетентність

1.4.4. Вартість поїздки в таксі включає оплату подання автомобіля 25 грн та вартість пройденої відстані в розмірі 5 грн за кожний кілометр.
1) Складіть функцію, яка визначає вартість поїздки в таксі залежно від пройденої відстані.
2) Знайдіть вартість поїздки, якщо пасажир проїхав 30 км.

1.4.5. Складіть функцію, яка визначає залежність витрат на поїздку власним автомобілем від відстані подорожі, якщо ваш автомобіль споживає 7,5 л бензину на шляху 100 км. Скільки грошей вам знадобиться на купівлю бензину для автомобіля, щоб доїхати з Харкова до Києва? Дізнайтеся вартість квитка на потяг і порівняйте витрати на транспорт в обох випадках. За яких умов подорож автомобілем може бути економнішою?

§2 РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

2.1. Основні методи розв'язування рівнянь і нерівностей

Таблиця 5

1. Область допустимих значень (ОДЗ) рівнянь і нерівностей

Областю допустимих значень **(або областю визначення) рівняння (або нерівності) називають спільну область визначення для функцій, що стоять у лівій і правій частинах рівняння (або нерівності)**

Для рівняння $\sqrt{x+2}=x$ (нерівностей $\sqrt{x+2}<x$ чи $\sqrt{x+2}>x$)

ОДЗ: $x+2\geqslant 0$, тобто $x\geqslant -2$, оскільки область визначення функції $f(x)=\sqrt{x+2}$ визначається умовою $x+2\geqslant 0$, а областю визначення функції $g(x)=x$ є множина всіх дійсних чисел

2. Рівняння-наслідки

Орієнтир	Приклад
Якщо кожний корінь першого рівняння є коренем другого, то друге рівняння називають *наслідком* першого. **Якщо з правильності першої рівності випливає правильність кожної наступної, одержуємо рівняння-наслідки.** *При цьому можлива поява сторонніх коренів*. **Тому при використанні рівнянь-наслідків перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою розв'язування**	Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+2}=x$. *Розв'язання* ▶ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата: $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2$; $x+2=x^2$; $x^2-x-2=0$; $x_1=2$, $x_2=-1$. *Перевірка.* $x=2$ — корінь; $x=-1$ — сторонній корінь. *Відповідь*: 2. ◁

3. Рівносильні рівняння і нерівності

Означення	Найпростіші теореми
Два рівняння (нерівності) називають *рівносильними* на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки. *Тобто кожний розв'язок першого рівняння (нерівності) є розв'язком другого, і навпаки, кожний розв'язок другого є розв'язком першого* (схеми такого розв'язування рівнянь і нерівностей наведено в пп. 4 і 6 цієї таблиці)	**1. Якщо з однієї частини рівняння (нерівності) перенести в другу доданки з протилежним знаком, одержимо рівняння (нерівність), рівносильне заданому (на будь-якій множині).** **2. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне і те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), одержимо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого)**

Продовження таблиці 5

4. Схема пошуку плану розв'язування рівнянь

Розв'язування рівнянь

за допомогою **рівнянь-наслідків**

1 ↓ 2 Перетворення, що гарантують збереження правильної рівності

Перевірка коренів підстановкою в початкове рівняння

за допомогою **рівносильних перетворень**

Урахування ОДЗ початкового рівня

1 ↑↓ 2 Зберігання на ОДЗ правильної рівності при прямих і зворотних перетвореннях

застосуванням властивостей функцій

1 — початкове рівняння;

2 — рівняння, одержане в результаті перетворення початкового;

↓, ↑ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень

5. Заміна змінних

Орієнтир	**Приклад**
Якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз зі змінною позначити однією буквою (новою змінною)	Розв'яжіть рівняння $x^4-3x^2-4=0$. *Розв'язання* ▶ *Заміна*: $x^2=t$ (тоді $x^4=\left(x^2\right)^2=t^2$). $t^2-3t-4=0$; $t_1=-1$, $t_2=4$. 1. При $t=-1$ маємо $x^2=-1$ — коренів немає. 2. При $t=4$ маємо $x^2=4$, тоді $x=\pm 2$. *Відповідь*: ± 2. ◁

6. Схема пошуку плану розв'язування нерівностей

Розв'язування нерівностей

за допомогою **рівносильних перетворень**	за допомогою **методу інтервалів** $f(x) \gtrless 0$
Урахування ОДЗ початкової нерівності ① $\downarrow\uparrow$ ② Зберігання на ОДЗ правильної нерівності при прямих і зворотних перетвореннях	1. Знайти ОДЗ. 2. Знайти нулі функції: $f(x)=0$. 3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному проміжку, на які ОДЗ розбивається нулями. 4. Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності.

① — початкова нерівність;

② — нерівність, одержана в результаті перетворення початкової;

$\downarrow$, $\uparrow$ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень (із вказівкою щодо напрямку їх виконання)

7. Метод інтервалів (розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)

План

1. **Знайти ОДЗ.**
2. **Знайти нулі функції: $f(x)=0$.**
3. **Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному проміжку, на які ОДЗ розбивається нулями.**
4. **Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності**

Приклад

Розв'яжіть нерівність $\dfrac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0$.

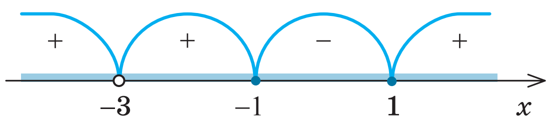
Розв'язання

▶ Нехай $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+3)^2}$.

1. ОДЗ: $(x+3)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -3$.
2. Нулі функції: $f(x)=0$.

$\dfrac{x^2-1}{(x+3)^2}=0$; $x^2-1=0$;

$x_1=-1$, $x_2=1$ (входять до ОДЗ).

3. 

Відповідь: $(-\infty;-3)\cup(-3;-1]\cup[1;+\infty)$. ◁

8. Теореми про рівносильність нерівностей

1. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число (*або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності*), **не змінюючи знак нерівності, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)**

2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число (*або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності*) **і змінити знак нерівності на протилежний, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)**

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття рівняння і нерівності зі змінною та їх розв'язків

Рівняння в математиці найчастіше розуміють як аналітичний запис задачі про знаходження значень аргумента, при яких значення двох даних функцій рівні. Тому в загальному вигляді рівняння з однією змінною x записують так: $f(x)=g(x)$.

Найчастіше рівняння означають коротше — як рівність зі змінною. Нагадаємо означення кореня рівняння.

> Означення. ***Коренем (або розв'язком) рівняння*** **називається значення змінної, при підстановці якого в рівняння утворюється правильна рівність.**

Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.

Наприклад, рівняння $2x=-1$ має єдиний корінь $x=-\frac{1}{2}$, а рівняння $|x|=-1$ не має коренів, оскільки значення $|x|$ не може бути від'ємним числом.

Якщо два вирази зі змінною сполучити одним зі знаків $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, то одержимо *нерівність зі змінною*.

Аналогічно до рівняння нерівність зі змінною (наприклад, зі знаком $>$) найчастіше розуміють як аналітичний запис задачі про знаходження тих значень аргументів, при яких значення однієї із заданих функцій більше за значення другої заданої функції. Тому в загальному вигляді нерівність з однією змінною x (наприклад, для випадку «більше») записують так: $f(x)>g(x)$. Нагадаємо означення розв'язку нерівності.

> Означення. ***Розв'язком нерівності*** **називається значення змінної, яке перетворює цю нерівність на правильну числову нерівність.**

Розв'язати нерівність — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Наприклад, розв'язками нерівності $3x<6$ є всі $x<2$, тобто всі значення x, менші від 2, розв'язками нерівності $x^2>-1$ є всі дійсні числа ($\boldsymbol{R}$), а нерівність $x^2<-1$ не має розв'язків, оскільки значення x^2 не може бути від'ємним числом, меншим від -1.

2 Область допустимих значень (ОДЗ) рівняння чи нерівності

Якщо задано рівняння $f(x)=g(x)$ або нерівність $f(x)>g(x)$ (чи аналогічну з іншим знаком), то спільну область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$ називають *областю допустимих значень* цього *рівняння (нерівності)*. (Іноді використовують також терміни «область визначення рівняння (нерівності)» або «множина допустимих значень рівняння (нерівності)».) Наприклад, для рівняння $x^2=x$ (або для нерівності $x^2<x$) областю допустимих значень є всі дійсні числа. Це можна записати, наприклад, так — ОДЗ: $x\in \boldsymbol{R}$, оскільки функції $f(x)=x^2$ і $g(x)=x$ мають області визначення $\boldsymbol{R}$.

Зрозуміло, що кожний корінь заданого рівняння (розв'язок заданої нерівності) входить як до області визначення функції $f(x)$, так і до області визначення функції $g(x)$ (інакше ми не зможемо отримати правильну числову рівність чи нерівність). Отже, *кожний корінь рівняння чи розв'язок нерівності обов'язково входить до їх ОДЗ*. Це дозволяє в деяких випадках використовувати аналіз ОДЗ рівняння чи нерівності під час їх розв'язування.

Наприклад, у рівнянні $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=x$ (чи у нерівності $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}>x$) функція $g(x)=x$ визначена при всіх дійсних значеннях x, а функція $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$ — тільки за умови, що під знаком квадратного кореня будуть стояти невід'ємні вирази. Отже, ОДЗ цього рівняння задається системою нерівностей $\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ 1-x\geqslant 0, \end{cases}$ з якої одержуємо систему $\begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 1, \end{cases}$ що не має розв'язків. Таким чином, ОДЗ заданого рівняння (нерівності) не містить жодного числа, і тому це рівняння (нерівність) не має розв'язків.

Зазначимо, що знаходження ОДЗ заданого рівняння чи нерівності може бути корисним для їх розв'язування, але не завжди є обов'язковим елементом розв'язування.

3 Методи розв'язування рівнянь та нерівностей

Для розв'язування рівнянь використовують методи *точного* і *наближеного розв'язування*. Зокрема, для точного розв'язування рівнянь у курсі математики 5–6 класів використовували залежності між компонентами та результатами дій і властивості числових рівностей; у курсі алгебри 7–9 класів — рівносильні перетворення рівнянь, а для наближеного розв'язування рівнянь — графічний метод.

Графічний метод розв'язування рівнянь не дає високої точності знаходження коренів рівняння, і за його допомогою найчастіше можна одержати лише грубі наближення коренів. Іноді зручно графічно визначити кількість коренів рівняння або знайти межі, у яких містяться ці корені. У деяких випадках можна графічно довести, що рівняння не має коренів. З указаних причин у шкільному курсі алгебри і початків аналізу під вимогою «розв'язати рівняння» розуміється вимога «використовуючи методи точного розв'язування, знайти корені даного рівняння». Наближеними методами розв'язування рівнянь можна користуватися тільки тоді, коли це зазначено в умові задачі (наприклад, якщо ставиться задача розв'язати рівняння графічно).

Переважно під час розв'язування рівнянь різних видів нам доведеться використовувати один із двох методів розв'язування. Перший із них полягає в тому, що задане рівняння замінюють більш простим рівнянням, яке має ті самі корені, — **рівносильним рівнянням**. У свою чергу, одержане рівняння замінюють простішим, рівносильним йому, і т. д., у результаті одержують найпростіше рівняння, яке рівносильне заданому і корені якого легко знайти. Ці корені і тільки вони є коренями даного рівняння.

Другий метод розв'язування рівнянь полягає в тому, що задане рівняння замінюють простішим рівнянням, до коренів якого належать усі корені даного рівняння, тобто замінюють так званим **рівнянням-наслідком**. У свою чергу, одержане рівняння замінюють більш простим рівнянням-наслідком доти, поки не одержать найпростіше рівняння, корені якого легко знайти. Тоді всі корені заданого рівняння містяться серед коренів останнього рівняння. Отже, щоб знайти корені заданого рівняння, достатньо корені останнього рівняння підставити в задане рівняння. За допомогою такої перевірки відділяють корені заданого рівняння (вилучають так звані *сторонні корені* — ті корені останнього рівняння, які не задовольняють задане).

У наступному параграфі буде також показано застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь певного виду.

> *Означення.* **Якщо кожен корінь першого рівняння є коренем другого, то друге рівняння називається *наслідком* першого.**

Із означення рівняння-наслідку одержуємо орієнтир: *для того щоб одержати рівняння-наслідок, достатньо розглянути задане рівняння як правильну числову рівність і гарантувати* **(тобто мати можливість обґрунтувати),** *що кожне наступне рівняння буде правильною числовою рівністю.*

Дійсно, якщо дотримуватися цього орієнтира, то, розглянувши задане рівняння як правильну числову рівність, ми фактично підставимо в перше рівняння замість змінної його корінь. Друге рівняння теж є правильною числовою рівністю, тоді розглянутий корінь першого рівняння є коренем і другого рівняння. Це означає, що друге рівняння є наслідком першого. Оскільки **в результаті використання рівнянь-наслідків можлива поява сторонніх коренів, то перевірка підстановкою коренів у початкове рівняння є складовою розв'язування** (див. розв'язання рівняння $\sqrt{x+2}=x$ за допомогою рівнянь-наслідків у п. 2 табл. 5).

Зауваження. Перехід від заданого рівняння до рівняння-наслідку можна позначити спеціальним знаком «$\Rightarrow$» (знаком слідування), але його використання для запису розв'язання не є обов'язковим. Разом із тим, якщо цей знак використано, то це свідчить про те, що ми скористалися рівняннями-наслідками, і тому обов'язково до запису розв'язання необхідно включити перевірку одержаних коренів.

Означення. **Два рівняння (нерівності) називають *рівносильними на деякій множині*, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки.**

Тобто кожний розв'язок першого рівняння (нерівності) є розв'язком другого і, навпаки, кожен розв'язок другого є розв'язком першого.

Використовуючи означення рівносильних рівнянь (нерівностей), можна отримати орієнтир для рівносильних перетворень рівнянь і нерівностей: *для виконання рівносильних перетворень рівнянь або нерівностей достатньо:*

1. *урахувати ОДЗ заданого рівняння (нерівності);*
2. *простежити за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної рівності (нерівності).*

Дійсно, якщо дотримуватися наведеного орієнтира, то на ОДЗ кожний розв'язок першого рівняння (нерівності) буде розв'язком другого (другої), і навпаки, кожен розв'язок другого рівняння (нерівності) буде розв'язком першого (першої), тобто на ОДЗ розглянуті рівняння (нерівності) будуть рівносильними.

Наприклад, щоб розв'язати за допомогою рівносильних перетворень рівняння $\frac{x^2-1}{x+1}=0$, достатньо врахувати його ОДЗ $(x+1\neq 0)$ і умову рівності дробу нулю (дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли чисельник дробу дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю). Також слід звернути увагу на те, що на ОДЗ усі потрібні перетворення можна виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної рівності.

Запис розв'язання в цьому разі може бути таким: $\frac{x^2-1}{x+1}=0$. ОДЗ: $x+1\neq 0$. Тоді $x^2-1=0$. Отже, $x=1$ (задовольняє умову ОДЗ) або $x=-1$ (не задовольняє умову ОДЗ).

Відповідь: 1.

Зазначимо, що для успішного розв'язування рівнянь з використанням рівнянь-наслідків або рівносильних перетворень доцільно також орієнтуватися в тому, у результаті яких перетворень рівнянь можуть з'явитися сторонні корені, а в результаті яких можна втратити корені рівняння. Найбільш типові випадки відповідних перетворень рівнянь та орієнтири, як у кожному з цих випадків одержати правильне (чи повне) розв'язання, наведено в таблиці «Причини появи сторонніх коренів та втрати коренів під час розв'язування рівнянь», з якою можна ознайомитися, звернувшися до інтернет-підтримки підручника.

Розгляньте зміст цієї таблиці самостійно. Зробіть висновки про те, яких перетворень бажано уникати під час розв'язування рівнянь і як діяти, коли ці перетворення все ж таки доводиться використовувати. Обговоріть одержані результати з однокласниками та однокласницями.

Розв'яжемо за допомогою рівносильних перетворень нерівність

$$\frac{x-3}{x+1}>0 \qquad (1)$$

аналогічно тому, як було розв'язане наведене вище рівняння. Для цього достатньо врахувати ОДЗ нерівності $(x+1\neq 0)$ та умову додатності дробу (*дріб буде додатним тоді й тільки тоді, коли чисельник і знаменник дробу мають однакові знаки*), а також звернути увагу на те, що на ОДЗ усі потрібні перетворення можна виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної нерівності.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Задана нерівність рівносильна сукупності двох систем: $\begin{cases}x-3>0,\\x+1>0\end{cases}$ або $\begin{cases}x-3<0,\\x+1<0.\end{cases}$ (2) Тоді одержуємо: $\begin{cases}x>3,\\x>-1\end{cases}$ або $\begin{cases}x<3,\\x<-1.\end{cases}$ Отже, $x>3$ або $x<-1$. *Відповідь*: $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. ◁	Зауважимо, що, записуючи умову додатності дробу — сукупність систем нерівностей (2), ми неявно врахували ОДЗ нерівності (1). Дійсно, якщо $x+1>0$ або $x+1<0$, то $x+1\neq 0$, тому в явному вигляді ОДЗ заданої нерівності не записана в оформленні розв'язання.

Для виконання рівносильних перетворень рівнянь чи нерівностей можна також користуватися спеціальними теоремами про рівносильність, які наведені в пп. 3 і 8 табл. 5. Обґрунтування цих теорем повністю аналогічне обґрунтуванню орієнтирів для рівносильних перетворень заданого рівняння чи нерівності.

Зауваження. Для позначення переходу від заданого рівняння (нерівності) до рівносильного йому рівняння (нерівності) можна використовувати спеціальний знак «$\Leftrightarrow$» (знак рівносильності), але в записі розв'язань це не є обов'язковим. (Хоча іноді ми його будемо використовувати, щоб підкреслити, що було виконано саме рівносильні перетворення.)

Наприклад, розв'язання нерівності (1) можна записати так.

$$\frac{x-3}{x+1}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}x-3>0,\\x+1>0\end{cases}$$

$$\text{або } \begin{cases}x-3<0,\\x+1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>3,\\x>-1\end{cases}$$

$$\text{або } \begin{cases}x<3,\\x<-1\end{cases} \Leftrightarrow x>3 \text{ або } x<-1.$$

4 Метод інтервалів

Розв'язування нерівностей методом інтервалів спирається на властивості функцій, пов'язані зі зміною знаків функції. Пояснимо ці властивості, використовуючи графіки відомих нам функцій, наприклад $y=\frac{1}{x}$ і $y=2x-2$ (рис. 2.1.1).

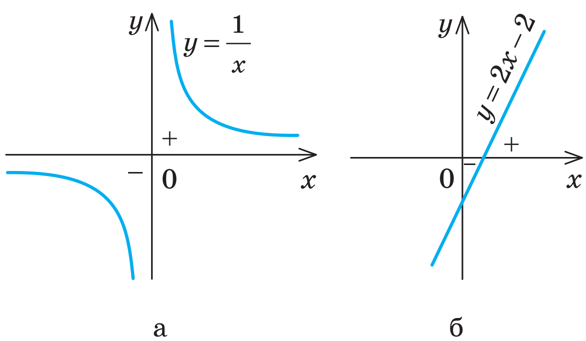


Рис. 2.1.1

Розглядаючи ці графіки, помічаємо, що функція може змінити свій знак тільки у двох випадках:

1) якщо графік розривається (як у випадку функції $y=\frac{1}{x}$ (рис. 2.1.1, *а*) —

графік розривається в точці 0, і знак функції змінюється в точці 0);

2) якщо графік без розриву переходить із нижньої півплощини у верхню (або навпаки), але тоді графік перетинає вісь Ox (як у випадку функції $y=2x-2$, рис. 2.1.1, *б*). На осі Ox значення функції дорівнюють нулю. (Нагадаємо, що значення аргумента, при яких функція перетворюється на нуль, називають *нулями функції*.) Отже, **будь-яка функція може змінити свій знак тільки в нулях або в точках, де розривається графік функції** (у так званих *точках розриву* функції[1]).

Точки, у яких розривається графік функції $f(x)$, ми виокремлюємо, як правило, коли знаходимо область визначення цієї функції. Наприклад, якщо $f(x)=\frac{1}{x}$, то її область визначення $x\neq 0$, і саме в точці 0 графік функції розривається (див. рис. 2.1.1, *а*). Якщо ж на якомусь проміжку області визначення графік функції не розривається і функція не дорівнює нулю, то за наведеним вище висновком вона не може в цьому проміжку змінити свій знак[2]. Отже, якщо позначити нулі функції на її області визначення, то область визначення розіб'ється на проміжки, усередині яких знак функції змінитися не може (і тому цей знак можна визначити в будь-якій точці з цього проміжку).

План розв'язування нерівностей методом інтервалів та приклад такого розв'язування наведено в п. 7 табл. 5.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1 Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\leqslant 0$ методом інтервалів та за допомогою рівносильних перетворень.

І спосіб (метод інтервалів)

Розв'язання

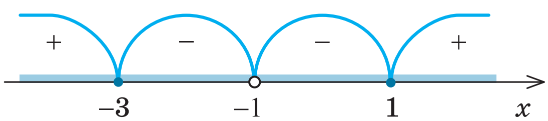
▶ Нехай $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

1. ОДЗ: $x\neq -1$.

2. Нулі $f(x)$: $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=0$; $x^2+2x-3=0$;

$x_1=1$, $x_2=-3$ (входять до ОДЗ).

3. Позначаємо нулі функції на ОДЗ і знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.



4. *Відповідь*: $[-3;-1)\cup(-1;1]$. ◁

Коментар

Задана нерівність має вигляд $f(x)\leqslant 0$, і для її розв'язування можна застосувати метод інтервалів. Для цього використаємо план, наведений в табл. 5.

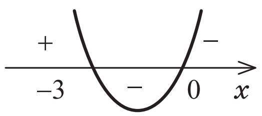
При знаходженні нулів $f(x)$ стежимо за тим, щоб знайдені значення входили до ОДЗ (або виконуємо перевірку знайдених коренів рівняння $f(x)=0$).

Записуючи відповідь до нестрогої нерівності, слід урахувати, що всі нулі функції повинні увійти до відповіді (у даному випадку — числа −3 і 1).

[1] Докладніше це поняття буде розглянуто в розділі 4.

[2] У розділі 4 ми уточнимо формулювання цієї властивості (так званих неперервних функцій). Для всіх відомих вам функцій (лінійних, квадратичних, степеневих, дробово-раціональних) ця властивість має місце.

II спосіб (за допомогою рівносильних перетворень)

Розв'язання	Коментар
▶ ОДЗ: $(x+1)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -1$. Тоді $(x+1)^2 > 0$ і задана нерівність на її ОДЗ рівносильна нерівності $x^2+2x-3 \leqslant 0$. Оскільки $x^2+2x-3=0$ при $x_1=-3$, $x_2=1$ (ці значення x входять до ОДЗ), одержуємо: $-3 \leqslant x \leqslant 1$ (див. рисунок).  Ураховуючи ОДЗ, отримуємо відповідь. *Відповідь*: $[-3;-1)\cup(-1;1]$. ◁	Виберемо для розв'язування метод рівносильних перетворень нерівності. Виконуючи рівносильні перетворення, ми повинні врахувати ОДЗ заданої нерівності, тобто врахувати обмеження $(x+1)^2 \neq 0$. Але якщо $x \neq -1$, то $(x+1)^2 > 0$, і тоді в заданому дробі знаменник додатний. Якщо виконується задана нерівність, то чисельник дробу $x^2+2x-3 \leqslant 0$ (і навпаки, якщо виконується остання нерівність, то на ОДЗ дріб $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \leqslant 0$), тобто задана нерівність рівносильна на ОДЗ нерівності $x^2+2x-3 \leqslant 0$. Щоб розв'язати одержану квадратну нерівність, знайдемо корені квадратного тричлена x^2+2x-3 і побудуємо ескіз графіка функції $y=x^2+2x-3$. Множина розв'язків квадратної нерівності: $-3 \leqslant x \leqslant 1$. Оскільки всі перетворення були рівносильними тільки на ОДЗ, то ми повинні вибрати тільки ті розв'язки квадратної нерівності, які задовольняють обмеження ОДЗ.

Який із запропонованих способів, на вашу думку, доцільніше використовувати під час розв'язування запропонованої нерівності?

Запитання для контролю

1. Поясніть зміст понять: «корінь рівняння», «розв'язок нерівності», «розв'язати рівняння чи нерівність», «область допустимих значень рівняння чи нерівності», «рівносильні рівняння чи нерівності».
2. Сформулюйте відомі вам теореми про рівносильність рівнянь та рівносильність нерівностей. Проілюструйте їх на прикладах.
3. Сформулюйте план розв'язування нерівностей методом інтервалів. Проілюструйте використання цього плану на прикладі.
4. Поясніть на прикладах, як можна виконувати рівносильні перетворення рівнянь та нерівностей у тих випадках, які не описуються відомими теоремами про рівносильність рівнянь та рівносильність нерівностей.
5. Дайте означення рівняння-наслідку заданого рівняння. Поясніть на прикладі, як можна розв'язувати рівняння за допомогою рівнянь-наслідків.

Виявіть свою компетентність

6. Доберіть власні приклади до таблиці «Причини появи сторонніх коренів та втрати коренів під час розв'язування рівнянь» (див. інтернет-підтримку підручника). Поясніть, як у кожному випадку одержати правильне (чи повне) розв'язування рівняння.

Вправи

2.1.1°. Знайдіть область допустимих значень (ОДЗ) рівняння:

1) $\frac{x-5}{x+2}-\frac{2x-3}{x}=0$;

2) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x}{x^2+1}=0$;

3) $\sqrt{x}=\frac{3x-6}{x-1}$;

4) $\sqrt{x^2+5}-\frac{x-5}{x+4}=0$.

2.1.2. З'ясуйте, чи є друге рівняння наслідком першого, або ці рівняння є рівносильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) $2x^2-8x-9=0$ і $x^2-4x-4{,}5=0$; 2) $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=0$ і $x^2-4=0$.

2.1.3°. Обґрунтуйте рівносильність рівнянь:

1) $5x-8=7-3x$ і $5x+3x=7+8$;

2) $(2x-1)(x^2+5)=x(x^2+5)$ і $2x-1=x$.

2.1.4°. Обґрунтуйте, що задані рівняння не є рівносильними:

1) $x^2+\frac{1}{x+3}=9+\frac{1}{x+3}$ і $x^2=9$;

2) $(2x-1)(x^2-5)-x(x^2-5)$ і $2x-1=x$.

2.1.5°. Поясніть, які перетворення було використано при переході від першого рівняння до другого і чи можуть вони приводити до порушення рівносильності:

1) $3x+1{,}1=6{,}8-2x$ і $3x+2x=6{,}8-1{,}1$;

2) $\frac{x^2-81}{x+9}+3x^2-1=0$ і $x-9+3x^2-1=0$;

3) $\frac{5}{3x-1}+x=3$ і $5+x(3x-1)=3(3x-1)$;

4) $\sqrt{x^2-1}=x-2$ і $x^2-1=x^2-4x+4$.

2.1.6. Визначте, чи є рівносильними задані рівняння на ОДЗ першого з них:

1) $5-x=x+7$ і $5-x+\frac{1}{x-3}=x+7+\frac{1}{x-3}$;

2) $\frac{12-2x}{x-2}=\frac{x-5}{x-2}$ і $12-2x=x-5$;

3) $6-x=10$ і $6-x+\sqrt{x}-\sqrt{x}=10$;

4) $(x^2+2x-3)(x^2+6)=5(x^2+6)$ і $x^2+2x-3=5$;

5) $x^2-1=6x-1$ і $\frac{x^2-1}{x}=\frac{6x-1}{x}$.

2.1.7. Розв'яжіть рівняння і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильності:

1) $\frac{8}{x}-\frac{5-x}{2}=\frac{8+3x}{x}-x$;

2) $\frac{x}{4}+\frac{(x-2)^2+8}{x}=\frac{(4-x)(2-x)}{x}$;

3) $\frac{7}{x+3}-\frac{1}{3-x}=\frac{6}{x^2-9}-\frac{x-4}{3+x}$;

4) $\frac{1}{x-2}+\frac{x-6}{3x^2-12}=\frac{1}{2-x}-1$.

2.1.8. Розв'яжіть рівняння за допомогою рівнянь-наслідків і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильності:

1) $3x+\sqrt{x-2}=5x-1+\sqrt{x-2}$;

2) $\sqrt{2x+5}=x+1$;

3) $\sqrt{3-2x}=1-x$;

4) $\sqrt{5+x^2}=x-4$.

2.1.9. Визначте умову, за якої є рівносильними рівняння:

1) $\frac{f(x)}{2x-3}=g(x)$ і $f(x)=g(x)(2x-3)$;

2) $f(x)+\sqrt{x}=g(x)+\sqrt{x}$ і $f(x)=g(x)$.

2.1.10. З'ясуйте, чи може відбутися втрата коренів або поява сторонніх коренів, якщо:

1) рівняння $(x^2+7)\ f(x)=4x^2+28$ замінити рівнянням $f(x)=4$;

2) рівняння $(x-1)f(x)=(x-1)g(x)$ замінити рівнянням $f(x)=g(x)$;

3) рівняння $\frac{f(x)}{x+3}=\frac{g(x)}{x+3}$ замінити рівнянням $f(x)=g(x)$;

4) рівняння $\frac{f(x)}{3x^2+5}=0$ замінити рівнянням $f(x)=0$.

Розв'яжіть нерівності 2.1.11–2.1.12 двома способами: за допомогою рівносильних перетворень і методом інтервалів.

2.1.11°. 1) $\frac{x^2-4}{x^2-3x-4}\geqslant 0$;

2) $\frac{2}{x+2}<\frac{1}{x-3}$;

3) $\frac{x^2-25}{(x+5)(x-4)}\leqslant 0$;

4) $\frac{x^2+12}{x^2-2x-8}\geqslant 1$.

2.1.12*. 1) $x^4-5x^2+4\leqslant 0$;

2) $9x^4-10x^2+1>0$;

3) $\frac{81}{x}\geqslant x^3$;

4) $(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)<105$.

2.1.13°. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{\frac{x-4}{x^2-4}}$;

2) $y=\sqrt{\frac{2x-x^2-1}{x^2+3x+2}}$;

3) $y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$;

4) $y=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

Виявіть свою компетентність

2.1.14. Перебуваючи за кордоном, ви можете користуватися послугами одного з двох мобільних операторів. Перший пропонує сплачувати 10 грн за першу хвилину і 2 грн за кожну наступну хвилину розмов, а другий — 7 грн за першу хвилину і 3 грн за кожну наступну хвилину.

1) Складіть функції, які виражають вартість розмови залежно від її тривалості для кожного оператора.

2) Побудуйте в одній системі координат графіки обох функцій, вважаючи, що тривалість розмови не перевищує 6 хв. Який висновок можна зробити стосовно доцільності використання послуг кожного оператора?

2.1.15. За температури 0° C металева рейка має довжину $l_0 = 25$ м, а проміжок між сусідніми рейками дорівнює 12 мм. Під час зростання температури відбувається теплове розширення рейки, при цьому її довжина змінюється за законом $l(t) = l_0(1+\alpha t)$, де $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1} — коефіцієнт теплового розширення, t — температура (у градусах Цельсія). За якої температури проміжок між рейками зникне? Відповідь виразіть у градусах Цельсія.

2.2. Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь

Таблиця 6

Орієнтир	Приклад
1. Скінченна ОДЗ	
Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається зі скінченного числа значень, то для розв'язування достатньо перевірити всі ці значення	$\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}$. ▶ ОДЗ: $\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ 2-2x^2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geqslant 1, \\ x^2\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ x^2=1 \Leftrightarrow\ x\pm 1.$ *Перевірка.* $x=1$ — корінь ($\sqrt{0}+1=1+\sqrt{0}$; $1=1$), $x=-1$ — не є коренем $\left(\sqrt{0}-1\neq 1+\sqrt{0}\right)$. *Відповідь*: 1. ◁
2. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння	
$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a \end{cases}$ $f(x)\geqslant a$ $g(x)\leqslant a$ Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x)=g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то рівність між лівою і правою частинами можлива тоді й тільки тоді, коли $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють a	$1-x^2=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}$. ▶ $f(x)=1-x^2\leqslant 1$, $g(x)=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}\geqslant 1$ (оскільки $\sqrt{\lvert x\rvert}\geqslant 0$). Отже, задане рівняння рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} 1-x^2=1, \\ \sqrt{1+\sqrt{x}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow\ x=0.$ *Відповідь*: 0. ◁
$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0. \end{cases}$ $f_1(x)\geqslant 0$, $f_2(x)\geqslant 0$, ... $f_n(x)\geqslant 0$ Сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю	$\sqrt{x-2}+\lvert x^2-2x\rvert+\ +(x^2-4)^2=0.$ ▶ $f_1(x)=\sqrt{x-2}\geqslant 0$, $f_2(x)=\lvert x^2-2x\rvert\geqslant 0$, $f_3(x)=(x^2-4)^2\geqslant 0.$ Отже, задане рівняння рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x-2}=0, \\ \lvert x^2-2x\rvert=0, \\ (x^2-4)^2=0. \end{cases}$ Із першого рівняння одержуємо $x=2$, що задовольняє й решту рівнянь системи. *Відповідь*: 2. ◁

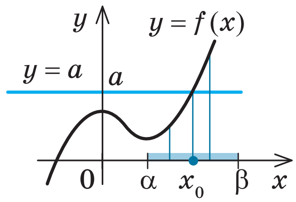
Продовження таблиці 6

3. Використання зростання та спадання функцій

Схема розв'язування рівняння

1. *Підбираємо один або декілька коренів рівняння.*
2. *Доводимо, що інших коренів це рівняння не має* (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку лівої та правої частин рівняння).

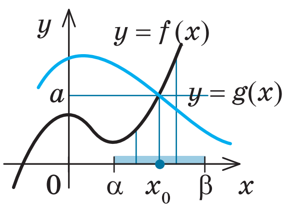
Теореми про корені рівняння



1. Якщо в рівнянні $f(x)=a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Приклад

Рівняння $\sqrt{x}+2x^3=3$ має єдиний корінь $x=1$ $(\sqrt{1}+2\cdot1^3=3$, тобто $3=3)$, оскільки функція $f(x)=\sqrt{x}+2x^3$ зростає на всій області визначення $x\geqslant0$



2. Якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Приклад

Рівняння $\sqrt{x}+x^3=3-x$ має єдиний корінь $x=1$ $(\sqrt{1}+1^3=3-1$, тобто $2=2)$, оскільки $f(x)=\sqrt{x}+x^3$ зростає на всій області визначення $x\geqslant0$, а $g(x)=3-x$ спадає (на множині $\boldsymbol{R}$, а отже, і при $x\geqslant0)$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Скінченна ОДЗ

Нагадаємо, що у разі, коли задано рівняння $f(x)=g(x)$, спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$ називають *областю допустимих значень* цього рівняння. Зрозуміло, що кожний корінь заданого рівняння входить як до області визначення функції $f(x)$, так і до області визначення функції $g(x)$. Отже, *кожний корінь рівняння обов'язково входить до ОДЗ цього рівняння*. Це дозволяє в деяких випадках, аналізуючи ОДЗ, одержати розв'язки рівняння.

Наприклад, якщо задано рівняння $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-2x}=3x-6$, то його ОДЗ можна записати за допомогою системи нерівностей $\begin{cases}x-2\geqslant0,\\4-2x\geqslant0.\end{cases}$ Розв'язуючи цю систему, одержуємо: $\begin{cases}x\geqslant2,\\x\leqslant2,\end{cases}$ тобто $x=2$. Отже, ОДЗ заданого рівняння складається лише з одного значення $x=2$. Але якщо тільки для одного числа потрібно з'ясувати, чи є воно коренем заданого рівняння, то для цього достатньо підставити це значення в рівняння. У результаті одержуємо правильну числову рівність $(0=0)$. Отже, $x=2$ — корінь цього рівняння, інших коренів бути не може, оскільки всі корені рівняння розташовані в його ОДЗ, а там немає інших значень, крім $x=2$.

Розглянутий приклад дозволяє виділити орієнтир, наведений у п. 1 табл. 6.

Зауваження. У тому випадку, коли ОДЗ — порожня множина (не містить жодного числа), ми можемо одразу дати відповідь, що задане рівняння не має коренів (див. приклад у п. 2. п. 2.1).

2 Оцінка значень лівої та правої частин рівняння

Деякі рівняння можна розв'язати за допомогою оцінки значень лівої та правої частин рівняння.

Нехай ми розв'язуємо рівняння $f(x)=g(x)$ і нам удалося з'ясувати, що для всіх допустимих значень x значення $f(x)\geqslant a$, а значення $g(x)\leqslant a$.

Розглянемо два випадки: 1) $f(x)>a$; 2) $f(x)=a$.

Якщо $f(x)>a$, то рівність $f(x)=g(x)$ не може виконуватися, бо $g(x)\leqslant a$, тобто при $f(x)>a$ задане рівняння коренів не має. Залишається тільки випадок $f(x)=a$, але, ураховуючи необхідність виконання рівності $f(x)=g(x)$, маємо, що тоді $g(x)=a$. Отже, ми обґрунтували, що виконання рівності $f(x)=g(x)$ (за умов $f(x)\geqslant a$ і $g(x)\leqslant a$) гарантує одночасне виконання рівностей $f(x)=a$ і $g(x)=a$ (і навпаки, якщо одночасно виконуються рівності $f(x)=a$ і $g(x)=a$, то виконується і рівність $f(x)=g(x)$). Це й означає, що рівняння $f(x)=g(x)$ рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a. \end{cases}$

Приклад використання такого способу розв'язування рівнянь наведено в п. 2 табл. 6.

Аналогічно до попередніх міркувань можна обґрунтувати й орієнтир для розв'язування рівняння $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=0$, у якому всі функції-доданки невід'ємні ($f_1(x)\geqslant 0$; $f_2(x)\geqslant 0$; ...; $f_n(x)\geqslant 0$).

Якщо припустити, що $f_1(x)>0$, то сума всіх функцій, що стоять у лівій частині цього рівняння, може дорівнювати нулю тільки тоді, коли сума $f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ буде від'ємною. Але це неможливо, оскільки за умовою всі функції невід'ємні. Отже, при $f_1(x)>0$ задане рівняння не має коренів. Ці самі міркування можна повторити для будь-якої іншої функції-доданка. Залишається єдина можливість — усі функції-доданки дорівнюють нулю (очевидно, що в цьому випадку рівність $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=0$ обов'язково буде виконуватися). Таким чином, **сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю.**

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $x^4+|x-1|=2x^2-1$, достатньо перенести всі члени в один бік, записати рівняння у вигляді $(x^2-1)^2+|x-1|=0$ і взяти до уваги, що $(x^2-1)^2$ і $|x-1|$ — невід'ємні функції. Отже, задане рівняння рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} (x^2-1)^2=0, \\ |x-1|=0. \end{cases}$ Із другого рівняння одержуємо $x=1$, що задовольняє й перше рівняння системи, тобто задане рівняння має єдиний корінь $x=1$.

3 Використання зростання та спадання функцій

Використання зростання та спадання функцій у розв'язуванні рівнянь спирається на таку властивість: *зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.*

Корисно пам'ятати спеціальні теореми про корені рівняння, наведені в п. 3 табл. 6.

Графічно твердження теорем проілюстровано в таблиці. Наприклад, у рисунку до теореми 1 пряма $y=a$ перетинає графік зростаючої на проміжку $[\alpha;\beta]$ функції $y=f(x)$ тільки в одній точці. Це й означає, що рівняння $f(x)=a$ не може мати більше одного кореня на проміжку $[\alpha;\beta]$. Доведемо це твердження аналітично.