Є. П. Нелін

ГЕОМЕТРІЯ

**(початок вивчення
на поглибленому рівні з 8 класу,
профільний рівень)**

підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
Видавництво «Ранок»
2018

УДК [37.016:514](075.3)
Н49

Нелін Є. П.

Н49 Геометрія (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / [Є. П. Нелін]. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018.

ISBN

УДК [37.016:514](075.3)

Інтернет-підтримка
Електронні матеріали
до підручника розміщено на сайті
interactive.ranok.com.ua

ISBN

ЗМІСТ

Шановні десятикласники і десятикласниці!

Ви продовжуєте вивчати геометрію. Мета цього підручника — допомогти вам опанувати її розділ, який називається стереометрією. У попередніх класах ви вивчали плоскі фігури та їх властивості, а тепер розглядатимете просторові об'єкти. У процесі вивчення стереометрії ви вдосконалите навички логічного мислення, розвинете просторову уяву, вміння подумки моделювати нові геометричні фігури й будувати їх зображення, а головне — оволодієте системою математичних знань, навичок і умінь, які необхідні для вивчення інших шкільних дисциплін, продовження навчання, а також стануть у пригоді в повсякденному житті, майбутній діяльності.

Засвоюючи стереометрію, ви ознайомитеся з новими геометричними поняттями і закономірностями, багато з яких люди здавна застосовують у виробничій діяльності, використовують в архітектурі, живописі тощо.

Ви побачите зв'язок геометрії з мистецтвом і напевно погодитеся з думкою геніального французького архітектора XX ст. Шарля Едуара Ле Корбюзьє, що навколишній світ є світом геометрії і своїми художніми враженнями людина зобов'язана саме геометрії. Ви зрозумієте слова видатного французького математика і філософа Блеза Паскаля: «Того, хто володіє геометрією, ця наука просуває настільки далеко, що він виявляється озброєним абсолютно новою силою».

Як користуватися підручником

Підручник має чотири розділи, кожний із яких складається з параграфів. Параграфи, як правило, містять такі структурні блоки.

Довідкові таблиці наведені на початку більшості параграфів і вміщують основні означення, ознаки та властивості розглядуваних понять теми, систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів з розв'язування завдань*. Радимо опрацювати цей матеріал у першу чергу, а вже після цього переходити до наступного блоку.

Пояснення й обґрунтування являють собою докладне викладення теоретичного матеріалу, наведеного в таблицях. Таке подання навчального матеріалу (спочатку структурованого у вигляді таблиць, а потім описаного детально) дозволить кожному з вас вибирати свій власний рівень ознайомлення з обґрунтуваннями, будуючи власну освітню траєкторію.

Приклади розв'язування задач ознайомлять вас із основними ідеями щодо розв'язування задач, допоможуть усвідомити й засвоїти способи дій з основними геометричними поняттями, набути необхідних предметних компетентностей. Для того щоб виділити орієнтовні основи діяльності з розв'язування завдань (загальні орієнтири), у прикладах власне розв'язання супроводжуються коментарями, які допоможуть вам скласти план розв'язування аналогічних завдань.

Розв'язання	Коментар
Як можна записати розв'язання задачі	Як можна міркувати під час розв'язування такої задачі

За такого подання коментар не заважає сприйняттю основної ідеї розв'язання завдань певного типу і дає змогу за потреби отримати детальну консультацію щодо розв'язування, яка міститься в коментарі.

З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу наприкінці кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ.

Запитання для контролю допоможуть вам пригадати й осмислити вивчене, звернути увагу на головне в параграфі, оцінити рівень засвоєння теоретичного матеріалу параграфа.

Вправи подано за трьома рівнями складності:

- *задачі середнього рівня* мають позначку «°»;
- *задачі достатнього рівня* (дещо складніші) подано без позначки;
- *задачі високого рівня* мають позначку «*».

До більшості вправ наприкінці підручника наведено *відповіді*.

У рубриці **«Виявіть свою компетентність»** наведено задачі практичного змісту та завдання, які для отримання розв'язку вимагають аналізу, узагальнення, систематизації набутих знань.

Зверніть також увагу на запропоновані в тексті параграфів супроводжуючі запитання, що спонукають до більш глибокого самостійного осмислення навчального матеріалу, та завдання, виконання яких, на нашу думку, сприятиме формуванню певних предметних та ключових компетентностей. Ці запитання та завдання мають відповідні позначення.

Матеріали рубрик **«Відомості з історії», «Видатні математики»** допоможуть вам дослідити розвиток геометричної науки та дізнатися про досягнення видатних учених України.

Для того щоб підручник допоміг вам у повній мірі, радимо ознайомитися із системою умовних позначень:

● початок обґрунтування твердження;

○ закінчення обґрунтування твердження;

▶ початок розв'язання задачі;

◁ закінчення розв'язання задачі;

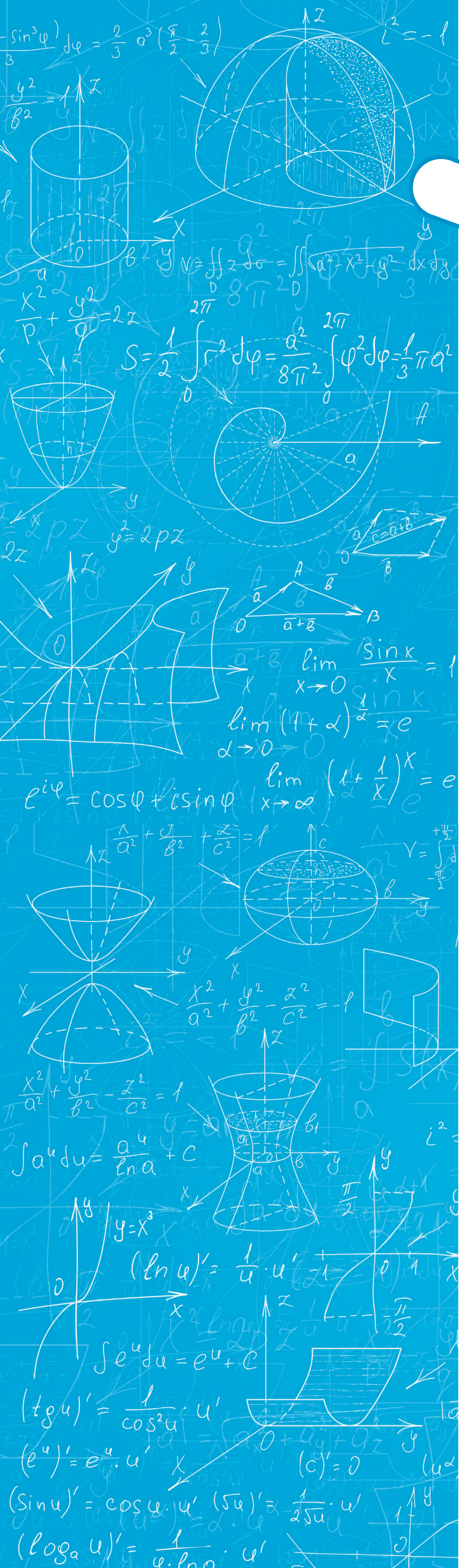
? запитання до учнів;

! цікава інформація або така, яку варто обміркувати;

i матеріали, пов'язані з ІКТ;

завдання, які вимагають самостійного опрацювання, сприяють активізації розумової діяльності;

U діяльність, розрахована на роботу в команді.



Розділ І

ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ

§ 1. Поняття про аксіоматичний метод у геометрії. Аксіоми планіметрії. Аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них

§ 2. Методи розв'язування геометричних задач

§ 3. Найпростіші задачі на побудову перерізів многогранників

У цьому розділі ви:

- дізнаєтеся про застосування в геометрії аксіоматичного методу — одного з методів побудови наукової теорії;
- ознайомитеся з основними поняттями й аксіомами стереометрії та наслідками з них;
- навчитеся, застосовуючи їх, розв'язувати найпростіші задачі на побудову перерізів призми та піраміди.

§1 ПОНЯТТЯ ПРО АКСІОМАТИЧНИЙ МЕТОД У ГЕОМЕТРІЇ. АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ. АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА НАЙПРОСТІШІ НАСЛІДКИ З НИХ

Таблиця 1

1. Аксіоми планіметрії

I. Аксіоми належності

$A \in a$, $B \notin a$

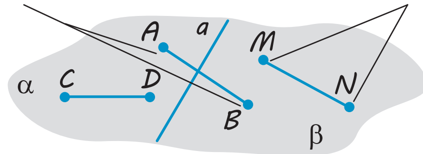
Через точки C і D проходить єдина пряма b.

II. Аксіоми взаємного розміщення точок на прямій і площині

Точка B лежить між точками A і C.

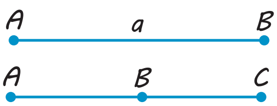
Точки лежать у різних півплощинах

Точки лежать в одній півплощині



Пряма a розбиває площину на дві півплощини α і β.

III. Аксіоми вимірювання та відкладання відрізків і кутів

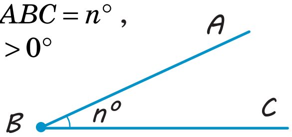


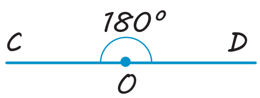
$AB = a$, $a > 0$

$AC = AB + BC$

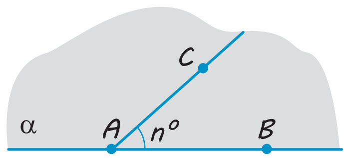
Відрізок $OA = m$ — єдиний.

$\angle ABC = n°$, $n° > 0°$



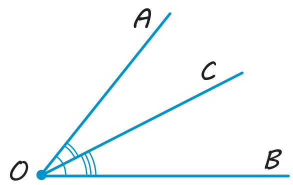


$\angle COD = 180°$



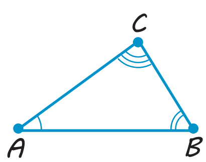
$\angle CAB = n°$ — єдиний

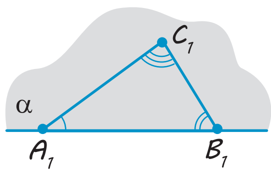
$(0° < n < 180°)$.



$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

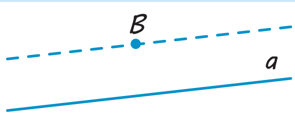
IV. Аксіома існування трикутника, що дорівнює даному





$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$

V. Аксіома паралельних прямих

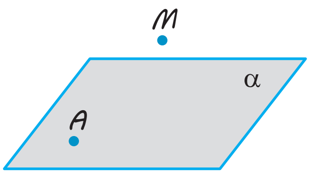
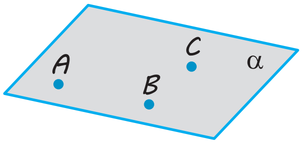
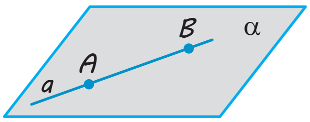
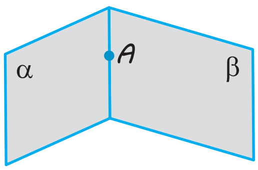


$B \notin a$

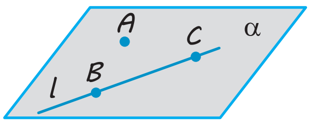
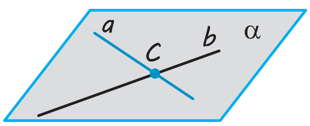
Через точку B можна провести на площині не більш як одну пряму, паралельну даній.

Продовження таблиці 1

2. Аксіоми стереометрії

Ілюстрація	Формулювання
	Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй. $A \in \alpha$; $M \notin \alpha$.
	Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
	Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині. Якщо $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, то $AB \subset \alpha$.
	Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.
	Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.

3. Наслідки з аксіом стереометрії

	Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
	Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

4. Означення, ознаки та властивості геометричних фігур і відношень

Означення
включає в себе характеристичні властивості фігури

Геометричні фігури або відношення
(рівність, подібність, паралельність, перпендикулярність тощо)

Ознака
дозволяє довести, що фігури, які розглядаються, є шуканими або пов'язані необхідним співвідношенням (рівність, подібність тощо)

Властивості

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття про стереометрію

Курс геометрії включає планіметрію і стереометрію. На уроках геометрії в 7–9 класах ви вивчали в основному планіметрію, тобто геометрію на площині. Усі фігури, які розглядають у планіметрії, наприклад трикутник, паралелограм, коло, лежать в одній площині. Усі точки кожної із цих фігур належать площині. Тому такі фігури називають *плоскими*.

Цього року ми вивчатимемо геометрію в просторі — стереометрію. *Стереометрією* називають розділ геометрії, що вивчає *просторові фігури* та їхні властивості. Просторові фігури можуть бути *неплоскими* (наприклад, куб чи сфера) або *плоскими*.

Усю сукупність точок, які розглядають у стереометрії, називають *простором*. *Фігурою* (або фігурою в просторі) називатимемо довільну множину точок, розташованих у просторі. Зокрема, це всі фігури, розміщені в будь-якій площині, у тому числі й сама ця площина. Отже, плоскі фігури також є просторовими фігурами. Тому основними властивостями плоских фігур, відомими з курсу планіметрії, ми користуватимемося і в стереометрії.

Проте в стереометрії найважливішими є просторові фігури, що не лежать цілком ні в одній площині, тобто *неплоскі* фігури.

Із деякими простими неплоскими фігурами ви зустрічалися в курсі математики початкової школи та 5 класу. До них відносять (рис. 1.1): куб (*а*); прямокутний паралелепіпед (*б*); призму (*в*); піраміду (*г*–*д*); конус (*е*); циліндр (*ж*); кулю (*з*).

Деякі фігури в просторі ще називають *тілами*[1]. Наочно геометричне тіло можна уявити собі як частину простору, що займає фізичне тіло, обмежене деякою поверхнею. Наприклад, поверхня кулі —

сфера — складається з усіх точок простору, віддалених від однієї точки — *центра* — на відстань, що *дорівнює радіусу*.

Ця поверхня обмежує *кулю*, яка складається з усіх точок простору, які віддалені від однієї точки — *центра* — на відстань, що *не перевищує радіуса*.

Куб, паралелепіпед, призма і піраміда є многогранниками. Строге означення многогранника дамо в 11 класі. Проте оскільки ми почнемо працювати з деякими видами многогранників у 10 класі, то запропонуємо означення, що спираються на наочно-інтуїтивні уявлення.

Планіметрія — від латин. *planum* — площина.
Стереометрія — від грецьк. *стереос* — просторовий.

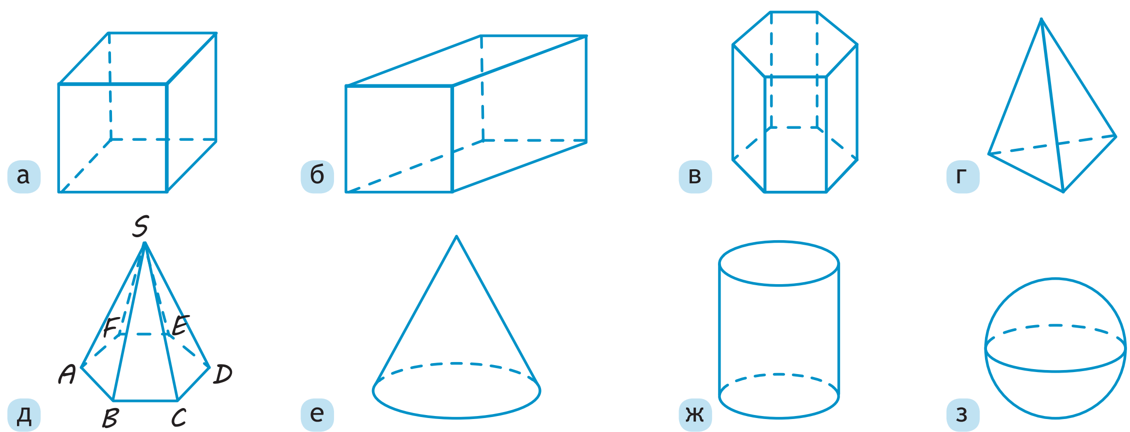


Рис. 1.1

[1] Строге означення тіла та його поверхні буде дано в курсі геометрії 11 класу.

Многогранником називатимемо обмежене тіло, поверхня якого складається зі скінченного числа плоских многокутників. Кожний із цих многокутників називають *гранню многогранника*, сторони многокутників — *ребрами многогранника* (рис. 1.2).

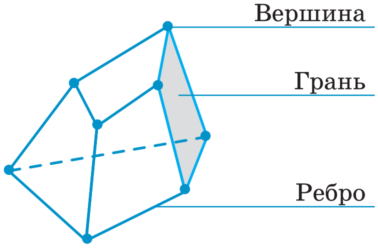


Рис. 1.2

Вершинами многогранника називають вершини його граней. Відрізок, що сполучає вершини многогранника, які не належать одній грані, називають *діагоналлю многогранника*.

Зображаючи многогранники, невидимі ребра (які закриті передніми гранями) виконують штриховими лініями (див. рис. 1.1 і 1.2). Як буде показано далі, під час креслення многогранників слід зберігати паралельність відповідних ребер, тому, наприклад, на зображенні куба чи прямокутного паралелепіпеда всі грані є паралелограмами (див. рис. 1.1, *а* і *б*).

Нагадаємо, що всі грані куба — квадрати, а всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.

Многогранник, дві грані якого — рівні n-кутники, а всі інші n граней — паралелограми, називають *n-кутною призмою*.

Рівні n-кутники називають *основами призми*, а паралелограми — *бічними гранями*. Куб і прямокутний паралелепіпед є окремими випадками чотирикутної призми.

Пірамідою називають многогранник, одна з граней якого — плоский многокутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину (рис. 1.1, *г*–*д*).

Трикутні грані називають *бічними гранями піраміди*, спільну вершину бічних граней — *вершиною піраміди*, а многокутник — *основою піраміди*. Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами її основи, називають *бічними ребрами піраміди*. Піраміду називають *n-кутною*, якщо її основою є n-кутник.

Піраміду називають *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а всі бічні ребра рівні.

Наприклад, якщо в піраміді $SABCDEF$ (рис. 1.1, *д*) $ABCDEF$ — правильний шестикутник і $SA = SB = SC = SD = SE = SF$, то це правильна шестикутна піраміда.

Трикутну піраміду іноді називають *тетраедром* (рис. 1.1, *г*). Тетраедр, усі грані якого — правильні трикутники, називають *правильним*.

2 Аксіоматична побудова геометрії

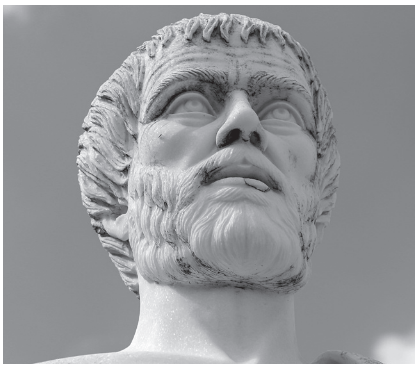
Курс планіметрії, який ви вивчали в 7-9 класах, і запропонований курс стереометрії значною мірою спираються на певні наочні уявлення про геометричні фігури. Разом з тим геометрія як наукова теорія про властивості фігур, розташованих у просторі, може бути побудована логічним (дедуктивним) методом на основі системи аксіом.

Пояснимо суть аксіоматичного методу побудови геометрії. Вводять основні (неозначувані) поняття — *фігури* і формулюють основні положення (*аксіоми*), у яких виражені співвідношення між основними поняттями[1]. Далі, використовуючи основні поняття й основні співвідношення між ними, визначають нові поняття — *фігури*, формулюють і доводять нові твердження — *теореми* про властивості введених понять. При цьому доводять теореми строго логічним шляхом, спираючись на аксіоми і раніше доведені теореми. Таким чином одержують геометричну систему тверджень, пов'язаних низкою логічних залежностей.

Основні означення та властивості фігур на площині, які ви вивчали в курсі геометрії 7-9 класів, наведено в інтернет-підтримці підручника (див.«Система опорних фактів курсу планіметрії», табл. 1–13).

Відомості з історії

Ідею дедуктивного методу побудови геометрії висунув ще давньогрецький філософ, учень *Сократа* (469–399 рр. до н. е.), *Платон* (422–347 рр. до н. е.). Проте дійсним засновником наукової теорії логічного виведення вважають учня *Платона*, давньогрецького мислителя *Аристотеля* (384–322 рр. до н. е.).



Аристотель

Зазначимо, що практично кожну теорему можна сформулювати у вигляді умовного твердження «Якщо A, то B», де літерою A позначено *умову теореми*, а B — її *висновок*. Наприклад, якщо в прямокутному трикутнику позначити довжину гіпотенузи через c, а довжини катетів — через a і b, то *теорему Піфагора* можна сформулювати так: «Якщо трикутник ABC прямокутний із прямим кутом C, то $c^2=a^2+b^2$». Умовою A цієї теореми є «трикутник ABC прямокутний із прямим кутом C», а висновком B — «$c^2=a^2+b^2$» (квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів).

Якщо поміняти місцями умову і висновок теореми, тобто розглянути твердження «Якщо B, то A», і це твердження буде правильним, то отримаємо так звану *теорему, обернену* до даної. Наприклад, для теореми Піфагора обернене твердження: «Якщо в трикутнику ABC зі сторонами a, b, c виконується рівність $c^2=a^2+b^2$, то цей трикутник прямокутний із прямим кутом C» теж правильне. Тому останнє твердження

[1] Зауважимо, що крім суто геометричних у планіметрії та стереометрії використовують деякі основні (неозначувані) поняття, спільні й для інших розділів математики, наприклад поняття «множина».

є формулюванням теореми, оберненої до теореми Піфагора.

Нагадаємо, що не кожна теорема має обернену. Наприклад, розглянемо теорему про суміжні кути: «Якщо два кути суміжні, то їх сума дорівнює 180°» (умова A — «два кути суміжні», висновок B — «їх сума дорівнює 180°»). Сформулюємо обернене твердження («Якщо B, то A»): «Якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то ці кути суміжні». Це твердження неправильне, тому що, наприклад, сума двох вертикальних прямих кутів дорівнює 180°, але ці кути не є суміжними. Отже, для теореми про суміжні кути не існує оберненої теореми.

? Які ще теореми, що не мають обернених, вам відомі?

Деякі математичні твердження іноді формулюють з використанням понять «необхідна умова» і «достатня умова». Поясними ці терміни.

У випадку, коли умовне твердження «Якщо A, то B» правильне, умову A називають *достатньою* для умови B, а умову B — *необхідною* для умови A (див. схему).

«Якщо A, то B» — правильне твердження

A — достатня умова для B

B — необхідна умова для A

Наприклад, властивість суміжних кутів із курсу планіметрії: «Якщо кути суміжні, то їх сума дорівнює 180°» містить два твердження: «кути суміжні» — твердження A і «їх сума дорівнює 180°» — твердження B. Тоді наведену вище властивість можна сформулювати так: «Для того щоб кути були суміжними (твердження A), *необхідно*, щоб їх сума дорівнювала 180°» (твердження B) або так: «Для того щоб сума двох кутів дорівнювала 180° (твердження B), *достатньо*, щоб ці кути були суміжними» (твердження A).

У випадку, коли правильними є і пряме твердження «Якщо A, то B», і обернене «Якщо B, то A», кожну з умов A і B називають *необхідною* і *достатньою* для іншої. Наприклад, пряму теорему Піфагора і обернену до неї можна сформулювати у вигляді одного твердження: «Для того щоб трикутник був прямокутним, *необхідно* і *достатньо*, щоб квадрат однієї сторони дорівнював сумі квадратів двох інших сторін». Іноді замість терміна «необхідно і достатньо» використовують також словосполучення «тоді і тільки тоді». У цьому разі останнє твердження буде сформульовано так: «Трикутник буде прямокутним *тоді і тільки тоді*, коли квадрат однієї сторони дорівнює сумі квадратів двох інших сторін».

Відомості з історії

Стосовно геометрії ідеї Аристотеля реалізував давньогрецький математик *Евклід* (III ст. до н. е.) у своєму трактаті з геометрії «Начала». Протягом 2000 років це творіння Евкліда було єдиним керівництвом, за яким навчали геометрії; від нього йшли й усі задуми подальшого досконалішого обґрунтування геометрії. Слід зазначити, що система сформульованих Евклідом аксіом (постулатів) потребувала вдосконалення, оскільки була неповною, а тому доведення нерідко «грішили» зверненням до наочності. Кропітка праця багатьох поколінь математиків світу дозволила створити науковий аксіоматичний метод побудови геометрії. Велика роль у цьому належить відомим німецьким математикам *Феліксу Клейну* (1849–1925) і *Давиду Гільберту* (1862–1943). У 1899 р. з'явилося видання «Основ геометрії» Гільберта, де він побудував аксіоматику таким чином, що логічна структура геометрії стала абсолютно прозорою.

Фелікс Клейн

Давид Гільберт

Таким чином, наявність у формулюванні теореми (чи завдання) словосполучення «тоді і тільки тоді» вимагає доведення як прямої, так і оберненої теорем.

3 Основні поняття стереометрії

Основними фігурами в просторі є *точка*, *пряма* і *площина*. Як і в курсі планіметрії, точки в просторі будемо позначати великими латинськими буквами A, B, C, D, ..., а прямі — малими латинськими буквами — a, b, c, ... або двома точками, що лежать на прямій. Площини позначатимемо малими грецькими буквами — α, β, γ, ..., а зображатимемо у вигляді паралелограмів або довільних замкнутих областей (рис. 1.3).

Рис. 1.3

Рис. 1.4. Озеро Синевир у Карпатах

! Озеро Синевир, якому близько 10 тис. років, називають «Морським Оком» Карпат. Воно розташоване на висоті 989 м над рівнем моря, його площа 4-5 га, максимальна глибина — 24 м. Входить до складу Національного природного парку «Синевир». У 2011 р. на території Національного парку створено єдиний в Україні реабілітаційний центр для бурих ведмедів.

Ці способи зображення відповідають наочному уявленню про площину як про гладеньку поверхню стола, озера (рис. 1.4) тощо. При цьому площину уявляють необмеженою в усі боки, ідеально рівною і такою, що не має ніякої товщини.

Якщо A — точка площини α, то кажуть, що *точка A лежить у площині* α, *а площина α проходить через точку A*. Це можна записати так: $A \in \alpha$. Якщо точка M не належить площині α, це записують так: $M \notin \alpha$ (рис. 1.5).

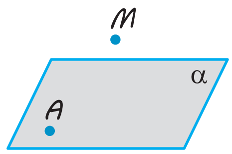


Рис. 1.5

Якщо кожна точка прямої a належить площині α, то кажуть, що *пряма a лежить у площині α, а площина α проходить через пряму a* (рис. 1.6). Це позначають так: $a \subset \alpha$. Якщо пряма b не належить площині α, це позначають так: $b \not\subset \alpha$.

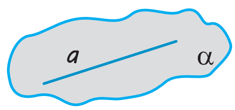


Рис. 1.6

Якщо пряма a і площина α мають тільки одну спільну точку A, то кажуть, що вони *перетинаються* в точці A, і записують так[1]: $a \cap \alpha = A$. На відповідному рисунку частину прямої, яка «закрита» зображенням площини, вважають невидимою і зображають штриховою лінією (рис. 1.7).

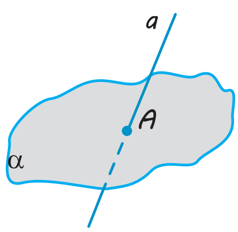


Рис. 1.7

[1] У наведеному записі літерою A позначено геометричну фігуру — множину точок, яка складається з однієї точки.

4 Аксіоми стереометрії

У стереометрії, як і в планіметрії, властивості геометричних фігур установлюють шляхом доведення відповідних теорем. Але на початку курсу, коли нам невідомо жодної властивості фігур у просторі, доводиться якісь властивості основних фігур приймати без доведення. Як і в планіметрії, ті властивості основних геометричних фігур, які приймають без доведення, називають *аксіомами*. Нагадаємо, що основними фігурами в просторі є точка, пряма і площина. Аксіоми виражають інтуїтивно зрозумілі властивості площин та їх зв'язок із іншими основними фігурами — точками і прямими.

Аксіома 1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.
Аксіома 2. Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
Аксіома 3. Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.
Аксіома 4. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку (рис. 1.8).
Аксіома 5. Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.

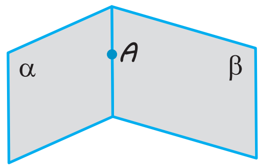
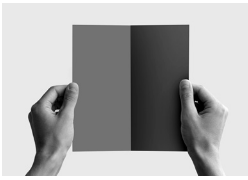


Рис. 1.8

Зауважимо, що властивості площин і прямих, зафіксовані в аксіомах, часто використовуються у практичній діяльності.

? На рисунках проілюстровано застосування аксіоми 2 (поясніть чому).

Зміст аксіоми 4 можна проілюструвати за допомогою зігнутого аркуша паперу або вашого підручника.



Твердження аксіоми 3 використовують, коли хочуть перевірити, чи є дана поверхня плоскою. Для цього до поверхні в різних місцях прикладають рівну рейку (прави́ло) та перевіряють, чи є зазор між рейкою та поверхнею.

У курсі стереометрії ми будемо також вважати, що *для будь-якої площини в просторі мають місце всі основні означення, теореми і аксіоми планіметрії*[1].

Докладно про систематизацію фактів і методів планіметрії дізнаєтесь, звернувшися до інтернет-підтримки підручника.

Зокрема, на кожній площині між двома вибраними точками існує певна відстань — довжина відрізка, що їх сполучає. Так, дві точки можуть належати одночасно різним площинам, але за аксіомою 5 відстань між ними на кожній із цих площин буде одна й та сама. Після того як вибрано одиничний відрізок, довжину кожного відрізка можна виразити додатним числом. До цього числа приписують назву одиничного відрізка: 2 см, 1,5 км тощо. Якщо одиничний відрізок не має назви, а довжина відрізка AB дорівнює, наприклад, 5 одиницям довжини, то пишемо: $AB=5$, що є скороченням запису $AB=5$ одиниць.

Аксіома про відстані дозволяє порівнювати фігури, розміщені на різних площинах, зокрема, застосовувати до них теореми про рівність і подібність трикутників.

Користуючись поняттям відстані, можна означити рівність і подібність фігур (зокрема трикутників) у просторі абсолютно так само, як це було зроблено в планіметрії.

Означення 1. Дві фігури називаються *рівними*, якщо існує відповідність[2] між їхніми точками, при якій відстані між парами відповідних точок рівні[3].

Означення 2. Дві фігури називаються *подібними*, якщо існує відповідність між їхніми точками, при якій відстані між відповідними точками змінюються в одне і те саме число разів.

Інакше кажучи, для двох довільних точок X і Y першої фігури і точок X' і Y' другої фігури, які їм відповідають, справедлива рівність $X'Y'=k\cdot XY$.

Надалі аксіому 5 ми, як правило, будемо використовувати неявно, тобто не посилаючись на неї, на відміну від перших чотирьох аксіом.

5 Наслідки з аксіом стереометрії

Використовуючи аксіоми стереометрії, за допомогою логічних міркувань установлюють справедливість інших властивостей. Розглянемо деякі з них.

Теорема 1.1. Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Доведення. Нехай точка A не лежить на прямій l. Виберемо на прямій l довільні точки B і C (рис. 1.9). Через точки A, B, C, які не лежать на одній прямій l, за аксіомою 2 проходить єдина площина α. За аксіомою 3 пряма l лежить у площині α. Отже, площина α проходить через пряму l і точку A.

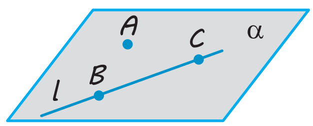


Рис. 1.9

Покажемо, що ця площина єдина. Дійсно, будь-яка інша площина, що проходить через пряму l і точку A, проходитиме також через точки A, B, C. За аксіомою 2 вона повинна збігатися з площиною α. ○

Теорема 1.2. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Доведення. Нехай прямі a і b перетинаються в точці C (рис. 1.10). Вибе-

[1] Систему аксіом планіметрії О. В. Погорєлова розглянемо далі в цьому параграфі.

[2] Нагадаємо, що при встановленні відповідності між двома фігурами кожній точці однієї фігури ставиться у відповідність єдина точка іншої фігури.

[3] Як і на площині, відповідність між двома фігурами, при якій зберігаються відстані між відповідними точками цих фігур, називають *переміщенням*, або *рухом*. Детальніше рух буде розглянуто в розділі 4.

ремо на прямій a довільну точку A, а на прямій b — довільну точку B, відмінні від точки C. Через точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 проходить єдина площина α. За аксіомою 3 пряма a лежить у площині α і пряма b лежить у площині α. Отже, площина α проходить через прямі a і b.

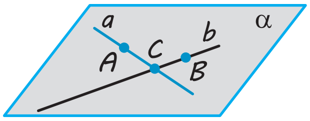


Рис. 1.10

Покажемо, що ця площина єдина. Дійсно, будь-яка інша площина, що проходить через прямі a і b, проходитиме також через точки A, B, C. За аксіомою 2 вона повинна збігатися з площиною α. ○

Із аксіоми 2 та доведених теорем випливає, що *площину можна задати:*

1) *трьома точками, які не лежать на одній прямій;*
2) *прямою і точкою, яка не лежить на ній;*
3) *двома прямими, які перетинаються.*

Домовилися, що для будь-якої площини в просторі мають місце всі основні означення, теореми і аксіоми планіметрії. Тому в нашому викладі система аксіом стереометрії фактично складається з групи аксіом 1–5 стереометрії і групи аксіом планіметрії (можливі аксіоматики шкільного курсу планіметрії наведено нижче та в табл. 1).

До системи аксіом висувають такі вимоги. Вона повинна бути:

1) *несуперечливою*, тобто такою, щоб із цієї системи аксіом неможливо було одержати логічним шляхом два твердження, які суперечать одне одному, — деяке твердження та його заперечення;
2) *незалежною*, тобто такою, щоб жодна з аксіом даної системи не була логічним наслідком інших її аксіом;

Зауваження. Оскільки три точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, однозначно визначають деяку площину, то часто площину, що проходить через ці точки, позначають так: (ABC).

Вираз «площина ABC» записують також скорочено «пл. ABC». Інколи, щоб підкреслити, що розглядувані чотири або більше точок лежать в одній площині, використовують скорочені записи «площина $ABCD$» або «пл. $ABCD$», які означають, що площина проходить через точки A, B, C, D.

3) *повною*, тобто такою, щоб за допомогою аксіом тільки цієї системи, не додаючи нових аксіом, можна було довести (або спростувати) строго логічним шляхом будь-яке твердження про властивості фігур даної геометрії.

У шкільних курсах геометрії найчастіше реалізується тільки перша вимога — несуперечливість системи аксіом. Через прагнення досягти більшої наочності і простоти доведень застосовують систему аксіом, яка не є незалежною і, як правило, не є повною. Повну систему аксіом евклідової геометрії наведено на с. 25–26.

Для більш строгого й докладного викладення матеріалу потрібно доповнити та уточнити запропоновану систему аксіом і обґрунтувати певні властивості, необхідні для розгляду подальшого матеріалу курсу стереометрії. Зокрема, в планіметрії ми мали одну площину, на якій розміщувались усі фігури, що розглядаються. У стереометрії багато, навіть безліч, площин. Через це розуміння деяких аксіом планіметрії як аксіом стереометрії потребує уточнення.

? Які уточнення аксіом планіметрії ви б запропонували?

Дамо аксіоми планіметрії та їх уточнені формулювання[1] для використання в стереометрії.

[1] У наведених формулюваннях уточнення виділено курсивом. Аксіоми планіметрії, які не вимагають уточнення для використання в стереометрії, наведено в таблиці без поділу на стовпчики.

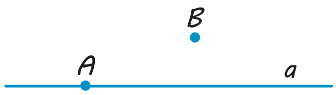
Таблиця 2

Аксіоми планіметрії

Аксіоми планіметрії за системою О. В. Погорєлова	Уточнені формулювання для використання в стереометрії

І. *Аксіоми належності*

I_1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, які не належать їй.



I_1. *Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.*
Ця аксіома у стереометрії набуває дещо іншого змісту — докладіше це буде розглянуто далі.

I_2. Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

ІІ. *Аксіоми взаємного розміщення точок на прямій і площині* **(аксіоми порядку)**

II_1. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

II_2. Пряма розбиває площину на дві півплощини.

II_2. Пряма, *яка належить площині*, розбиває цю площину на дві півплощини.

ІІІ. *Аксіоми вимірювання та відкладання відрізків і кутів*

III_1. Кожний відрізок (рис. *а*) має певну довжину, більшу за нуль. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин (рис. *б*), на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

$AB = a, \; a > 0$

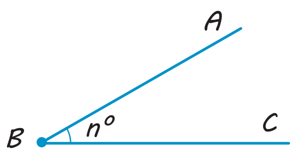
а

$AC = AB + BC$

б

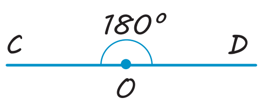
III_2. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини $(OA = m)$, і до того ж тільки один.

III_3. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль (рис. *а*). Розгорнутий кут дорівнює 180° (рис. *б*). Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами (рис. *в*).



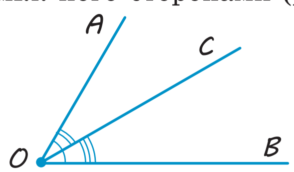
$\angle ABC = n°, \; n° > 0°$

а



$\angle COD = 180°$

б

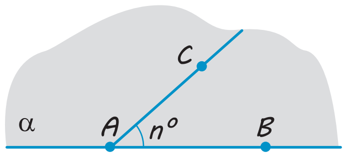


$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

в

Продовження таблиці 2

III_4. Від будь-якої прямої в дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою від 180°, і до того ж тільки один.

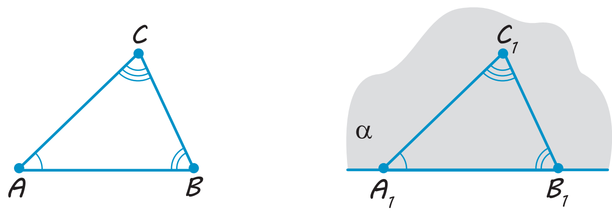


$\angle CAB = n^\circ$ — єдиний $(0^\circ < n < 180^\circ)$

III_4. Від півпрямої *на площині, яка містить її*, у дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою від 180°, і тільки один.

IV. *Аксіома існування трикутника, що дорівнює даному*

IV_1. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, у даному розміщенні відносно даної півпрямої.

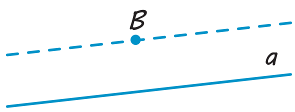


$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$

IV_1. Який би не був трикутник, *на площині, яка містить його*, існує трикутник, що дорівнює даному, у заданому розміщенні відносно даної півпрямої.

V. *Аксіома паралельних прямих*

V_1. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш як одну пряму, паралельну даній.



V_1. *На площині* через дану точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більше як одну пряму, паралельну даній.

Отже, аксіома I_1 у стереометрії набуває дещо іншого змісту. У планіметрії ця аксіома стверджувала існування точок поза даною прямою на тій площині, на якій лежить пряма (і всі розглядувані фігури). Тепер ця аксіома стверджує взагалі існування точок, що не лежать на даній прямій. Із неї безпосередньо не випливає, що існують точки поза даною прямою на площині, на якій лежить пряма. Це потребує спеціального доведення.

● *Доведення.* Нехай дано площину α і a — пряму в цій площині (рис. 1.11). Доведемо існування у площині α точок, що не лежать на прямій a.

Позначимо точку A на прямій a і точку A' поза площиною α. Через пряму a і точку A' проведемо площину α'. Візьмемо точку B поза площиною α' та проведемо через пряму AA' і точку B площину β. Площини α і β перетинаються по прямій b, яка проходить через точку A і відмінна від прямої a. Точки цієї прямої, відмінні від точки A, лежать у площині α поза прямою a, що й потрібно було довести. ○

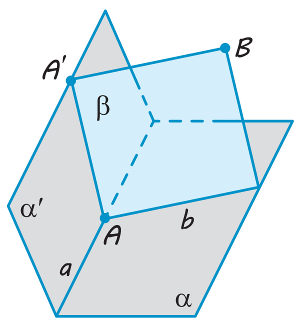


Рис. 1.11

Відомі математики

Олексій Васильович Погорєлов (1919–2002) — видатний вітчизняний математик, учений зі світовим ім'ям, академік Національної академії наук України, заслужений діяч науки і техніки України.

Рідкісне поєднання математичного та інженерного талантів визначило коло наукових інтересів О. В. Погорєлова. Його праці належать до геометрії «в цілому», основ геометрії, теорії диференціальних рівнянь у часткових (частинних) похідних, теорії стійкості пружних оболонок, питань кріогенного електромашинобудування.

Погорєлов — автор підручників з усіх основних розділів геометрії для вищих навчальних закладів. Ці підручники вирізняються оригінальністю викладу матеріалу та математичною строгістю. Багато й успішно Олексій Васильович працював також над питаннями вдосконалення шкільної математичної освіти. Створений ним підручник з геометрії спрямовано на розвиток логічного мислення та здібностей учнів.

На будівлі Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, де навчався і працював О. В. Погорєлов, встановлено меморіальну дошку.

Для розгляду деяких стереометричних понять корисно ввести також поняття *розбиття простору на частини кожною з площин*.

Пригадаємо, що кожна з прямих на площині розбиває її на дві півплощини (рис. 1.12), що мають такі властивості:

1) півплощина, обмежена прямою a, містить цю пряму, але не збігається з нею;
2) якщо кінці A і B відрізка AB лежать в одній півплощині (але не належать прямій a), то відрізок AB не перетинає пряму a (рис. 1.12, *а*);
3) якщо ж кінці A і B відрізка AB належать різним півплощинам (але не належать прямій a), то відрізок AB перетинає пряму a (рис. 1.12, *б*).

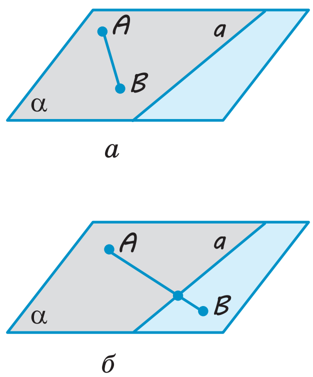


Рис. 1.12

Аналогічно означають і частину простору, обмежену даною площиною, — *півпростір*.

Площину, яка обмежує півпростір, називають його *границею*.

Теорема 1.3. Площина розбиває простір на два півпростори. Якщо точки A і B належать одному півпростору, то відрізок AB не перетинає площину (рис. 1.13, *а*). Якщо ж точки A і B належать різним півпросторам, то відрізок AB перетинає площину (рис. 1.13, *б*).

● *Доведення.* Нехай α — дана площина. Позначимо точку D, яка не лежить на площині α. Така точка існує за аксіомою 1 стереометрії. Розіб'ємо всі точки простору, які не лежать на площині α, на два півпростори таким чином. Точку A віднесемо до одного півпростору, якщо відрізок AD не перетинає площину α, і до другого півпростору, якщо відрізок AD перетинає площину α. Покажемо, що це розбиття простору має властивості, названі в теоремі.

Нехай точки A і B належать першому півпростору. Проведемо через точки A, B і D площину α'. Якщо площина α' не перетинає площину α, то відрізок AB теж не перетинає цю площину. Припустимо, що площина α' перетинає площину α (рис. 1.14). Оскільки площини різні, то їх перетин відбувається по деякій прямій a. Пряма a розбиває площину α' на дві півплощини. Точки A і B належать одній півплощині, а саме тій, у якій лежить точка D. Тому відрізок AB не перетинає пряму a, а отже, і площину α.

Якщо точки A і B належать другому півпростору, то площина α' перетинає площину α, оскільки відрізок AD перетинає площину α. Точки A і B належать одній півплощині розбиття площини α' прямою a. Звідси випливає, що відрізок AB не перетинає пряму a, а отже, і площину α.

Якщо, нарешті, точка A належить одному півпростору, а точка B — іншому, то площина α' перетинає площину α, а точки A і B лежать у різних півплощинах площини α' відносно прямої a. Тому відрізок AB перетинає пряму a, а отже, і площину α. ○

Необхідно зазначити, що в стереометрії існує декілька рівносильних систем аксіом, одну з яких ми й обрали. Якби ми обрали іншу систему, деякі з аксіом, наведених вище, перетворилися б на теореми, а деякі теореми стали б аксіомами.

Уявіть, що в деякій системі аксіом теорему 1.1 прийнято за аксіому. Чи залишиться при цьому теоремою теорема 1.2?

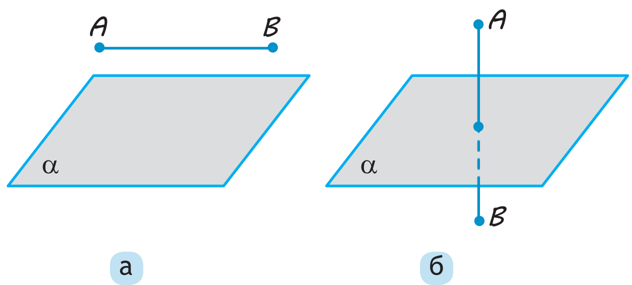


Рис. 1.13

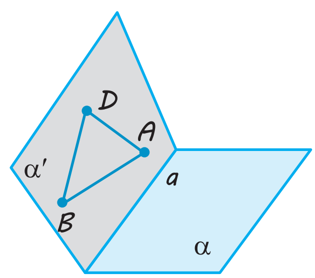


Рис. 1.14

Відомості з історії

На виняткове значення властивості про розбиття площиною простору на два півпростори чи не вперше звернув увагу всесвітньо відомий український математик *Михайло Васильович Остроградський*. Він створив підручник з елементарної геометрії, який мав величезний вплив на викладання геометрії впродовж усього XIX ст.

Народився М. В. Остроградський у селі Пашенівка Кобеляцького повіту Полтавської губернії (тепер це Козельщинський район Полтавської області) у родині дрібного поміщика. З діда-прадіда Остроградські належали до козацької старшини, а сам рід, за легендою, походив від


М. В. Остроградський

знаменитих волинських державників і просвітителів князів Острозьких; звідси й прізвище — Остроградські. Михайло Остроградський навчався спочатку в Полтавській гімназії, а потім — у щойно відкритому Харківському університеті. Після закінчення університету Остроградський у 1822 р. їде до Парижа, де слухає лекції таких корифеїв математичної науки, як Лаплас, Пуассон, Ампер, Фур'є, Штурм, Коші, Пуансо та ін. У 1826 р. Оґюстен Коші в одній зі своїх праць дуже схвально відгукнувся про успіхи молодого Остроградського. Такий відгук цінився тоді більше від будь-якого диплома.

М. В. Остроградський створив велику наукову школу, традиції якої ще й досі помітні в проблематиці математичних досліджень вітчизняних учених. Він був обраний академіком багатьох академій, почесним членом університетів і наукових товариств. Поховали його на батьківщині. У Полтавському педагогічному інституті відкрито музей М. В. Остроградського. 200-річчя з дня народження видатного українського математика занесено до календаря пам'ятних дат ЮНЕСКО.

У нашому курсі система аксіом (так само, як і в інших підручниках для школи) не є повною. Так, зокрема, із наведеної системи аксіом не випливає, що між двома даними точками прямої обов'язково лежить ще точка цієї прямої. Це здається очевидним, оскільки пряма, за нашими уявленнями, суцільна, неперервна, без «дірок». Але таке уявлення має одержати точне означення у вигляді властивості прямої. Аксіоми, які задають цю властивість, — це аксіоми неперервності. Ми не наводимо їх, оскільки це утруднило б виклад, тому доводиться частково поступитися строгістю заради наочності і простоти доведення.

Формулювання аксіом неперервності наведено на с. 28.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Чи можуть три з них лежати на одній прямій?

Розв'язання

▶ Нехай дано чотири точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Припустимо, що три з даних точок, наприклад A, B, C, лежать на одній прямій a (а четверта точка D не лежить на цій прямій).

Тоді через три точки A, B, D, які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 можна провести площину α (рис. 1.15). Але за аксіомою 3, якщо дві різні точки A і B прямої a лежать у площині α, то і вся пряма лежить у цій площині, а отже, і точка C теж лежить у площині α. Таким чином, усі чотири точки лежать в одній площині α, що суперечить умові.

Коментар

На запитання «Чи може виконуватися дане твердження?» можна дати відповідь:

«Так», і тоді достатньо навести хоча б один приклад, коли це твердження виконується;

«Ні», і тоді потрібно довести, що це твердження ніколи не виконується (найчастіше це доводять методом від супротивного).

Використовуючи метод *від супротивного*, потрібно:

1) зробити припущення, протилежне тому, що ми хочемо довести;

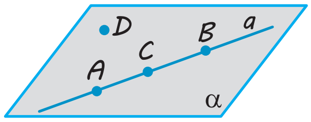


Рис. 1.15

Отже, наше припущення неправильне, і якщо чотири точки не лежать в одній площині, то жодні три з них не лежать на одній прямій. ◁

2) спираючись на аксіоми та вже доведені теореми, отримати суперечність із умовою або з відомою властивістю;
3) зробити висновок про те, що наше припущення неправильне, а правильним є те, що потрібно було довести.

Задача 2* Доведіть, що **через будь-які дві різні точки простору можна провести пряму, і до того ж тільки одну.**

Розв'язання

▶ Нехай A і B — дві різні точки простору. Виберемо точку C, яка не лежить на одній прямій з точками A і B (за відповідною аксіомою планіметрії).

Через точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 проведемо площину α. У площині α за відповідною аксіомою планіметрії через точки A і B можна провести пряму a. Припустимо, що в просторі через точки A і B можна провести ще одну пряму a_1, відмінну від прямої a. За аксіомою 3 пряма a_1 лежить у площині α (оскільки дві її точки A і B лежать у площині α). Тоді в площині α через дві різні точки A і B проведено дві різні прямі a і a_1, що суперечить відповідній аксіомі планіметрії. Отже, через дві різні точки в просторі можна провести тільки одну пряму. ◁

Коментар

У планіметрії твердження «Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну» було аксіомою. Проте в стереометрії ця аксіома стверджує тільки те, що *в розглядуваній площині через дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну*.

Відповідний факт у просторі потребує доведення. Для цього слід використати додатково таку аксіому планіметрії: «*Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, які не належать їй*».

Ця аксіома і в просторі гарантує існування точок, які не належать даній прямій.

Задача 3 Дано пряму і точку, що не лежить на ній. Доведіть, що **всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, лежать в одній площині.**

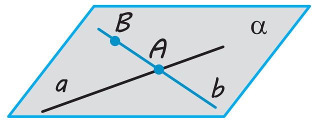
Розв'язання

▶ Нехай дано пряму a в просторі і точку B, яка не лежить на ній. Через пряму a і точку B проведемо площину α (за теоремою 1.1 ця площина єдина). Нехай довільна пряма b проходить через точку B і перетинає пряму a в точці A (рис. 1.16). Тоді точки A і B прямої b належать площині α, отже, за аксіомою 3 і вся пряма b лежить у площині α.

Коментар

Спочатку побудуємо площину, яка проходить через дані пряму і точку. Потім доведемо, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, лежать у цій площині.

Для коректного доведення слід також упевнитися, що побудована площина єдина.

Розв'язання	Коментар
Таким чином, усі прямі, які перетинають дану пряму *a* і проходять через дану точку *B*, що не лежить на ній, лежать в одній площині α.◁	 Рис. 1.16

Запитання для контролю

1. Наведіть приклади просторових фігур, плоских фігур, неплоских фігур. Яке мінімальне число точок може містити неплоска фігура?
2. Назвіть основні поняття стереометрії. Сформулюйте аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них.
3.* Дайте означення рівності та подібності фігур у просторі.
4.* Доведіть, що через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
5.* Доведіть, що через дві прямі, які перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
6. Поясніть зміст поняття «обернена теорема» і наведіть приклади прямої та оберненої теорем. Наведіть приклад теореми, яка не має оберненої, та поясніть, чому її немає.
7.* На прикладі твердження: «Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм» поясніть зміст понять «необхідна умова», «достатня умова». Сформулюйте дане твердження, використовуючи терміни: «необхідно»; «достатньо». Чи можна поєднати умову і висновок наведеного твердження терміном «необхідно і достатньо»? Якщо можна, то поясніть чому.
8. Поясніть суть аксіоматичного методу побудови геометрії.
9. Які вимоги висувають до системи аксіом? Поясніть суть кожної з вимог.
10. Поясніть, що називається півпростором, який визначається даною площиною α.
11. Сформулюйте теорему про розбиття простору площиною. Поясніть її зміст.
12.* Доведіть теорему про розбиття простору площиною.

Вправи

1.1.° Поясніть, чому стіл, який має три ніжки, обов'язково стійкий, а про стіл із чотирма ніжками цього стверджувати не можна.

1.2.° (Жарт.) Три мухи одночасно злетіли з кришки стола. Чи можуть вони знову опинитися в одній площині?

1.3.° Чи можна провести площину через три точки, які лежать на одній прямій? Відповідь поясніть, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.

1.4.° Скільки площин може проходити через три дані точки?

1.5. Доведіть, що площина і пряма, яка не лежить на ній, або не перетинаються, або перетинаються в одній точці.

1.6. Доведіть, що існує пряма, яка перетинає дану площину.

1.7. Точка M належить площині α, а точка N не належить їй. Чи належить площині α середина відрізка MN? Поясніть відповідь, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.

1.8. Дайте відповідь на запитання, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них. Чи є правильним, що можна провести площину через будь-які:
1) дві точки;
2) три точки;
3) чотири точки?

1.9.° Скільки площин можна провести через одну пряму? Обґрунтуйте свою відповідь.

1.10.° Чи можуть дві площини мати:
1) тільки одну спільну точку;
2) тільки дві спільні точки?

1.11.° Чи можуть дві різні площини мати дві різні спільні прямі?

1.12. Як розташовані дві площини, якщо в кожній із них лежить один і той самий трикутник?

1.13. Доведіть, що існує площина, яка перетинає дану площину.

1.14. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі AC і BD не перетинаються.

1.15. Дано площину α і квадрат $ABCD$. Чи може площині α належати:
1) тільки одна вершина квадрата;
2) тільки дві його вершини;
3) тільки три вершини?

1.16.* Дві вершини трикутника належать площині α. Чи належить цій площині третя вершина, якщо відомо, що даній площині належить:
1) точка перетину медіан трикутника;
2) центр вписаного в трикутник кола?

1.17.* Чи кожна точка кола належить площині, якщо відомо, що цій площині належать:
1) дві точки кола;
2) три точки кола?

1.18.* Чи правильно, що через три прямі, які попарно перетинаються, проходить єдина площина?

1.19.* Дано дві прямі, які перетинаються. Доведіть, що всі прямі, які перетинають обидві дані прямі і не проходять через точку їх перетину, лежать в одній площині.

1.20.* Три площини мають спільну точку. Чи є правильним твердження, що всі ці площини мають спільну пряму? Скільки прямих можна отримати у разі попарного перетину цих площин?

1.21. Серед прямих і площин, що проходять через вершини куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.17), назвіть:
1) пари прямих, що перетинаються;
2) трійки прямих, які перетинаються в одній точці;
3) пари площин, що перетинаються;
4) трійки площин, які перетинаються в одній точці.

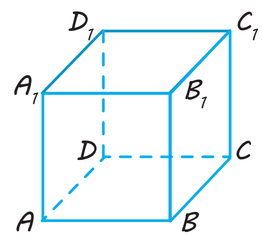


Рис. 1.17

1.22.* Дано три різні площини, які попарно перетинаються. Доведіть, що коли дві з прямих перетину цих площин перетинаються, то третя пряма проходить через точку їх перетину.

1.23. Дано чотири точки. Відомо, що пряма, яка проходить через будь-які дві із цих точок, не перетинається з прямою, яка проходить через інші дві точки. Доведіть, що дані чотири точки не лежать в одній площині.

1.24. Чи лежать в одній площині прямі a, b і c, якщо будь-які дві з них перетинаються, але не існує точки, що належить всім трьом прямим? Виконайте рисунок.

1.25. Прямі a, b і c, що лежать в одній площині, перетинаються в точці O. Доведіть, що існує площина, яка не проходить через точку O та перетинає три дані прямі a, b і c.

1.26. На яке найбільше число частин можуть розбивати простір:
1) дві площини; 2) три площини; 3) чотири площини?

1.27. Поясніть, чому весь простір не може бути півпростором, що визначається деякою площиною α.

1.28. Чи може площина, що перетинає площину α, бути повністю розташованою в одному з півпросторів, які визначає площина α?

1.29. Що можна сказати про взаємне розташування двох півпросторів та їх границь α і β, якщо:
1) перетином[1] цих півпросторів є площина α;
2) перетин цих півпросторів збігається з їх об'єднанням?

1.30. У результаті перетину скількох півпросторів можна отримати:
1) куб; 2) трикутну піраміду?

1.31.* Кінці ламаної, яка складається з двох ланок, лежать по різні боки від площини α. Доведіть, що ламана перетинає площину α.

1.32. Поясніть, звідки випливає, що в кожному півпросторі лежить нескінченна множина:
1) точок; 2) прямих.

1.33.* Дано $n > 4$ точок, кожні чотири з яких лежать в одній площині. Доведіть, що всі ці n точок лежать в одній площині.

1.34.* Дано $n > 3$ прямих, кожні дві з яких перетинаються. Доведіть, що всі n прямих лежать в одній площині або всі проходять через одну точку.

1.35. Скільки різних площин можуть визначати 5 точок? Дайте всі можливі відповіді. Наведіть відповідні рисунки.

---

[1] Під перетином півпросторів розуміємо фігуру, яка складається з усіх спільних точок цих півпросторів.

1.36.* Площини α і β перетинаються по прямій a. Через точку A прямої a проведено площину γ, що не містить пряму a. Доведіть, що площина γ перетинає площини α і β по двох різних прямих.

1.37. Дано площину α та три прямі AB, BC і AC, які перетинають її в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що точки A_1, B_1 і C_1 належать одній прямій.

Виявіть свою компетентність

1.38.° Як можна перевірити якість виготовлення лінійки, якщо є гарно оброблена плоска плита? На який теоретичний факт спирається ця перевірка?

1.39.° Столяр за допомогою двох ниток перевіряє, чи буде стійко стояти на підлозі виготовлений стіл, який має чотири ніжки. Як потрібно натягнути ці нитки?

Відомості з історії

Аксіоматика евклідової геометрії

Сучасна система аксіом евклідової геометрії складається з п'яти груп і спирається на шість основних (неозначуваних) понять. Це — об'єкти трьох видів: точки, прямі та площини і три види відношень між ними, які виражаються словами «належить», «лежить між», «рух».

I. АКСІОМИ НАЛЕЖНОСТІ

I_1. Через кожні дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

I_2. На кожній прямій лежать принаймні дві точки. Існують хоча б три точки, які не лежать на одній прямій.

I_3. Через кожні три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

I_4. На кожній площині лежать принаймні три точки та існують хоча б чотири точки, які не лежать в одній площині.

I_5. Якщо дві точки даної прямої лежать на даній площині, то і сама пряма лежить на цій площині.

I_6. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають ще одну спільну точку (а отже, і спільну пряму).

II. *АКСІОМИ ПОРЯДКУ*

II_1. Якщо точка B лежить між точками A і C, то всі три точки лежать на одній прямій.

II_2. Для будь-яких точок A і B існує така точка C, що B лежить між A і C.

II_3. Із трьох точок прямої тільки одна лежить між двома іншими.

II_4. (*Аксіома Паша*) Якщо пряма l перетинає одну сторону трикутника (рис. 1.18), то вона перетинає ще й іншу його сторону або проходить через його вершину (відрізок AB означають як множину точок, які лежать між точками A і B; відповідно означають і сторони трикутника).

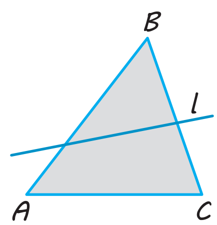


Рис. 1.18

III. *АКСІОМИ РУХУ*

III_1. Рух ставить у відповідність точкам точки, прямим — прямі, площинам — площини, зберігаючи належність точок прямим і площинам.

III_2. Два послідовних рухи дають знову рух, і для всякого руху є обернений рух.

III$_3$. Якщо дано точки A, B і півплощини α та β, що обмежені продовженими півпрямими a, b, які виходять з точок A, B (рис. 1.19), то існує рух, і до того ж єдиний, який переводить точку A, півпряму a, півплощину α, відповідно в точку B, пряму b, півплощину β (півпряма і півплощина легко означаються на основі понять належності та порядку).

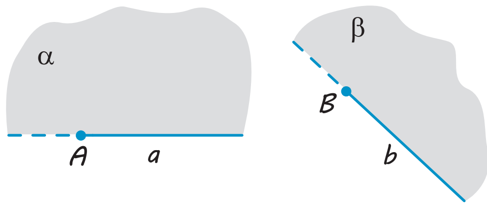


Рис. 1.19

IV. *АКСІОМИ НЕПЕРЕРВНОСТІ*

IV$_1$. (*Аксіома Архімеда*) Будь-який відрізок AB можна перекрити меншим відрізком AA_1, відкладаючи його на AB достатнє число разів: $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_nA_{n+1}$ (рис. 1.20); відкладання відрізка здійснюється рухом.

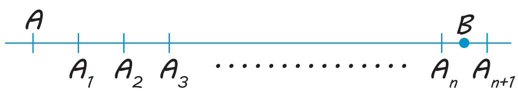


Рис. 1.20

IV$_2$. (*Аксіома Кантора*) Для послідовності вкладених відрізків A_nB_n (рис. 1.21), довжини яких прямують до нуля, існує, і до того ж єдина, точка C, що належить усім відрізкам A_nB_n.

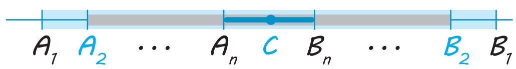


Рис. 1.21

V. АКСІОМА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ

V$_1$. Через дану точку поза даною прямою можна провести на площині не більш як одну пряму, що не перетинає дану, тобто не більш як одну пряму, паралельну даній.

У наведеній системі аксіом III група містить аксіоми руху, які запропонував на початку XX ст. німецький математик Ф. Шур. Д. Гільберт до числа основних понять замість руху ввів поняття «конгруентність». Відповідно до цього в системі аксіом Гільберта III група містить п'ять аксіом конгруентності фігур.

За допомогою основних визначають решту понять евклідової геометрії. Усі твердження про властивості геометричних фігур, що їх не містять аксіоми, повинні бути доведені суто логічним виведенням із цих аксіом. Наведена система аксіом евклідової геометрії має властивості повноти і несуперечності.

Якщо в аксіоматиці евклідової геометрії замінити аксіому паралельності (*через дану точку поза даною прямою можна провести на площині не більш як одну пряму, що не перетинає дану, тобто паралельну даній*) на твердження, що *через точку, яка не лежить на даній прямій, проходять хоча б дві прямі, що лежать з даною в одній площині і не перетинають її*, то одержимо іншу систему аксіом. Це система аксіом геометрії Лобачевського, що є теж несуперечливою. У ній аксіома паралельності не залежить від решти аксіом евклідової геометрії.

Здавалося б, нова аксіома суперечить звичайним уявленням. Проте за належного розуміння і ця аксіома, і вся геометрія Лобачевського мають цілком реальний сенс. Її створив і розвинув визначний учений М. І. Лобачевський, який уперше повідомив про неї в 1826 р. Дещо пізніше з тією ж теорією виступив угорський учений Я. Больяї, тому геометрію Лобачевського називають іноді геометрією Лобачевського — Больяї. Її називають також неевклідовою геометрією, хоча термін «неевклідова геометрія» має ширше значення, включаючи й інші теорії, що виникли слідом за геометрією Лобачевського і засновані також на зміні аксіом евклідової геометрії.

Як уже зазначалося, у зв’язку з аксіоматичною побудовою геометрії природно виникають три питання:

1. Чи є не суперечливою прийнята нами система аксіом, тобто чи не можуть із неї бути виведені шляхом логічних міркувань два наслідки, які суперечать один одному?
2. Чи є повною система аксіом, тобто чи не можна її поповнити новими аксіомами, які не суперечили б уже прийнятим і не випливали б із них?
3. Чи є незалежними прийняті аксіоми, тобто чи не випливають деякі аксіоми з інших?

Розв’язання цих питань тісно пов’язане з побудовою реалізацій системи аксіом. Реалізація полягає в указанні об’єктів трьох видів довільної природи, що умовно називають «точками», «прямими» і «площинами». Відношення між ними умовно називають такими словами, як «належить», «лежить між», «рух», для яких у силу їх конкретного змісту виконуються аксіоми.

Річ у тім, що основні поняття геометрії не означають, і все, що нам про них відомо, виражається аксіомами. Тому наші висновки відносяться до об’єктів довільної природи, аби тільки для них і відношень між ними виконувалися аксіоми.

Доведення несуперечності системи аксіом зводиться до доведення існування хоча б однієї її реалізації. Доведення незалежності даної аксіоми зводиться до вказівки такої реалізації, у якій виконуються всі аксіоми, окрім цієї. Нарешті, доведення повноти системи аксіом зводиться до доведення того, що для всіх реалізацій можна встановити таку взаємно однозначну відповідність між точками, прямими і площинами, при якій відповідні елементи перебувають в однакових відношеннях.

Наприклад, для геометрії Лобачевського на площині може бути запропонована така реалізація всередині круга на звичайній (евклідовій) площині.

Внутрішню частину якогось круга (тобто круг за винятком кола, що його обмежує) назвемо «площиною». Точкою «площини» буде точка всередині круга (рис. 1.22).

«Прямою» назвемо будь-яку хорду з вилученими кінцями (оскільки коло круга вилучене з «площини»); «рухом» назвемо будь-яке перетворення круга в себе, яке переводить хорди в хорди.

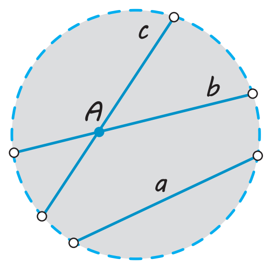


Рис. 1.22

Рівними назвемо відповідно фігури всередині круга, що переводяться одна в іншу такими перетвореннями.

Тоді будь-який геометричний факт, описаний такою мовою, є теоремою або аксіомою геометрії Лобачевського.

Іншими словами, усяке твердження геометрії Лобачевського на площині є не що інше, як твердження евклідової геометрії, що відноситься до фігур усередині круга, лише переформульоване в указаних термінах. Евклідова аксіома про паралельні прямі тут явно не виконується, оскільки через точку *A*, яка не лежить на даній хорді *a* (тобто на «прямій» *a*), проходить скільки завгодно хорд («прямих»), які її не перетинають.

Аналогічно реалізацією геометрії Лобачевського в просторі може бути геометрія всередині кулі, виражена у відповідних термінах («прямі» — хорди, «площини» — плоскі перерізи внутрішньої частини кулі, «рівні» фігури — такі, які переводяться одна в іншу перетвореннями, що переводять кулю в себе і хорди в хорди).

Таким чином, геометрія Лобачевського має абсолютно реальний сенс і така ж несуперечлива, як і геометрія Евкліда.

§2 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Таблиця 3

1. Методи розв'язування геометричних задач

Методи розв'язування геометричних задач

- **Геометричні методи**
  - Використання «ключового» трикутника, рівності та подібності трикутників, властивостей геометричних фігур
  - Метод геометричних перетворень (симетрія відносно осі та точки, паралельне перенесення, поворот, подібність фігур)
- **Аналітичні методи**
  - Уведення невідомих відрізків та кутів і використання рівнянь та їх систем чи властивостей функцій
  - Метод площ
  - Координатний метод
  - Векторний метод

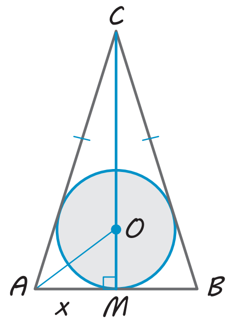
2. Введення невідомих для розв'язування геометричних задач на обчислення

Орієнтир

Якщо в умові геометричної задачі на обчислення взагалі не дано відрізки або дані відрізки та кути не можна об'єднати в зручний для розв'язування задачі трикутник, то зазвичай вводять невідомий відрізок (або невідомий кут, або кілька невідомих).

Приклад

У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, дорівнює 25 см. Обчисліть площу цього трикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 10 см.

План	Розв'язання і коментар
1. *Позначимо якоюсь буквою, наприклад x, невідомий відрізок* (або кут, або кілька невідомих).	Нехай у рівнобедреному трикутнику ABC $(AC = CB)$ медіана $CM = 25$ см (яка є і бісектрисою, і висотою) та радіус вписаного кола $OM = 10$ см. Ці відрізки не є сторонами одного трикутника. Тому для розв'язування задачі виберемо якийсь відрізок як невідомий. Необхідно, щоб вибраний відрізок разом із даними відрізками утворював зручні для розв'язування трикутники. Нехай $AM = x$, де $x > 0$. Цей відрізок можна об'єднати в прямокутні трикутники і з медіаною CM, і з радіусом OM. 
2. *Спробуємо скласти рівняння* (чи систему рівнянь) *з уведеним невідомим.*	Із $\triangle AMC$: $AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{x^2 + 25^2} = \sqrt{x^2 + 625}$. Щоб скласти рівняння, скористаємось тим, що центр вписаного кола лежить у точці перетину бісектрис: AO — бісектриса кута BAC. Тоді AO є також і бісектрисою $\triangle AMC$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника (див. п. 3 табл. 3) $\frac{AC}{AM} = \frac{CO}{OM}$, тобто $\frac{\sqrt{x^2 + 625}}{x} = \frac{15}{10}$.
3. *Розв'язуємо одержане рівняння* (чи систему рівнянь) або перетворюємо його (її) таким чином, щоб отримати відповідь на запитання задачі. *З одержаних розв'язків вибираємо ті, які задовольняють умову геометричної задачі.*	Піднесемо обидві частини одержаного рівняння до квадрата та розв'яжемо останнє рівняння. Отримуємо: $x^2 = 500$. Звідси $x = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$. (Оскільки $x > 0$, то другий корінь одержаного рівняння $x = -\sqrt{500} = -10\sqrt{5}$ не задовольняє умову задачі і його не записують до розв'язання.)
4. *Користуючись знайденою величиною, даємо відповідь на запитання задачі.*	Тоді $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CM = AM \cdot CM = 25x = 250\sqrt{5}$ (см²). Відповідь: $250\sqrt{5}$ см².

3. Використання методу площ для розв'язування геометричних задач

Зміст деяких прийомів розв'язування задач за допомогою методу площ

- *Розбити даний многокутник на частини і записати окремо площу всього многокутника і окремо суму площ його частин та прирівняти одержані величини.*
- *Щоб знайти відношення відрізків, розміщених на одній прямій, іноді буває корисним замінити відношення відрізків відношенням площ трикутників зі спільною вершиною, основами яких є розглядувані відрізки.*

Приклад

Доведіть, що **бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, довжини яких пропорційні довжинам прилеглих сторін трикутника.**

План

Щоб знайти відношення відрізків BD і DC, спробуємо знайти відношення площ трикутників ABD і ACD зі спільною вершиною A, основами яких є дані відрізки (тоді, і висота цих трикутників, проведена з вершини A, буде спільною).

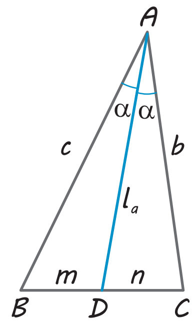
Розв'язання

Нехай $AD = l_a$ — бісектриса трикутника ABC зі сторонами $AB = c$, $AC = b$ і $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $BD = m$, $DC = n$.

Тоді, з одного боку:

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} c l_a \sin\alpha, \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} b l_a \sin\alpha$$

і $$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} c l_a \sin\alpha}{\frac{1}{2} b l_a \sin\alpha} = \frac{c}{b}. \qquad (1)$$



З іншого боку:

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} m h_a, \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} n h_a$$

і $$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} m h_a}{\frac{1}{2} n h_a} = \frac{m}{n}. \qquad (2)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (1) і (2), одержуємо $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$, що і потрібно було довести.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

У курсі планіметрії 7–9 класів ви розглянули значну кількість геометричних задач та їх розв'язань різними методами. Дамо короткий огляд розглянутих типів задач та методів їх розв'язування, оскільки вони застосовуються і в стереометрії. Так, розв'язування значної кількості стереометричних задач можна звести до розв'язування кількох планіметричних задач у різних площинах.

За вимогою геометричні задачі можна поділити на такі типи: *на доведення, на обчислення, на побудову, на дослідження.* Задачі кожного із цих типів розв'язують різними методами, які умовно поділяють на *геометричні* та *аналітичні* (див. п. 1 табл. 3).

Нагадаємо, що значна частина теорем курсу планіметрії відносилася до геометрії трикутника. Це не випадково, оскільки розв'язування багатьох задач зводиться до розгляду одного чи декількох трикутників. Тому, говорячи про геометричні методи розв'язування планіметричних задач, можна умовно виділити метод «ключового» трикутника. За цим методом у даній фігурі потрібно знайти трикутник (або декілька трикутників), до дослідження якого (яких) зводиться розв'язування задачі. Інколи з цією метою спочатку слід виконати якусь додаткову побудову, наприклад у чотирикутнику провести діагональ.

Деякі з часто використовуваних додаткових побудов корисно пам'ятати. Зокрема, *якщо в умові задачі фігурує медіана трикутника, то буває зручним продовжити цю медіану за сторону на таку саму відстань і доповнити рисунок до паралелограма*. Наприклад, у трикутнику ABC зі сторонами $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ (рис. 2.1) продовжимо медіану AM за сторону BC на відстань $MD=AM=m_a$ та з'єднаємо відрізками точку D з точками B і C.

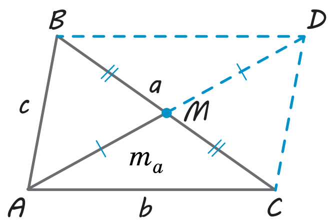


Рис. 2.1

Тоді отримаємо паралелограм $ABDC$, оскільки його діагоналі в точці перетину діляться навпіл (див. «Систему опорних фактів курсу планіметрії», табл. 7). Але *сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін*:

$$AD^2+BC^2=2\left(AC^2+AB^2\right), \text{ або}$$

$$\left(2m_a\right)^2+a^2=2\left(b^2+c^2\right).$$

Звідси $m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

Іноді додаткові побудови здійснюють, використовуючи певні геометричні перетворення (див. «Систему опорних фактів курсу планіметрії», табл. 5). Наприклад, *розв'язуючи задачі, пов'язані з трапецією, часто буває зручним використати паралельне перенесення її бічної сторони або діагоналі* (див. «Систему опорних фактів курсу планіметрії», табл. 10, друга і третя додаткові побудови).

«Систему опорних фактів курсу планіметрії» наведено в інтернет-підтримці підручника

Розв'язуючи геометричні задачі на доведення, слід пам'ятати, що твердження деяких з них доводять *методом від супротивного*. Нагадаємо його зміст:

1. *Робимо припущення, протилежне тому, що потрібно довести.*
2. *Спираючись на аксіоми та теореми, отримуємо з припущення наслідок, який суперечить умові або відомій властивості.*
3. *Робимо висновок, що наше припущення є неправильним, а правильним є твердження, яке потрібно довести.*

Використовуючи метод доведення від супротивного, як правило, рисунок виконують до тієї геометричної ситуації, яка випливає з припущення. Наприклад, розв'язання задачі «Доведіть, що на площині *пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу пряму*» може бути таким.

Доведення

1) Нехай прямі a і b паралельні. Припустимо, що пряма c, яка перетинає пряму a в точці A, не перетинає пряму b (рис. 2.2).

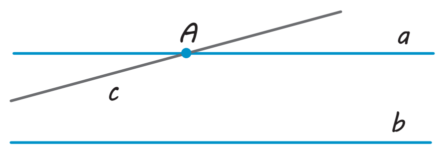


Рис. 2.2

2) Отже, пряма c паралельна прямій b. Але тоді через точку A проходять дві прямі a і c, паралельні прямій b, що суперечить аксіомі паралельних прямих.

3) Таким чином, наше припущення є неправильним, і пряма c обов'язково перетне й пряму b. ○

Приступаючи до розв'язування геометричної задачі, слід ураховувати, що майже кожна геометрична задача потребує індивідуального підходу, винахідливості та інтуїції. Проте можна дати деякі загальні рекомендації, що будуть корисними під час розв'язування багатьох задач.

Розв'язування практично будь-якої геометричної задачі ***починають з рисунка***. Він повинен бути досить лаконічним.

Слід зображати лише «функціонуючі» частини геометричних фігур. Так, наприклад, якщо в задачі розглядають радіус описаного кола, то часто можна не зображати коло (а зобразити тільки його центр і радіус). Але якщо в умові задачі йдеться про точку кола, то його зображення може бути корисним для розв'язання. *Необхідно уникати надмірного ускладнення рисунка*. Для цього можна, наприклад, виконати виносні рисунки, що зображають фрагменти даної конфігурації. З іншого боку, корисно безпосередньо на рисунку вказувати числові чи буквені значення лінійних або кутових величин. Зазначимо, що є такі задачі, у процесі розв'язування яких доводиться уточнювати особливості конфігурації, яка розглядається, та переробляти початковий рисунок таким чином, що остаточного вигляду він набуває лише одночасно із закінченням розв'язування.

Розв'язуючи геометричну задачу, ***треба спиратися не лише на рисунок***.

Він може «підказати», що якісь точки лежать на одній прямій чи на одному колі. Проте в процесі розв'язування ці особливості розміщення точок повинні бути обґрунтовані без посилань на рисунок. Інколи рисунок може стати причиною неповного розв'язування задачі, оскільки ті співвідношення, які виконані на ньому і здаються очевидними, насправді потребують спеціального обґрунтування. Тому завжди намагайтеся зобразити всі можливі конфігурації, а потім за допомогою міркувань відкинути зайві (якщо ці зайві дійсно є). Нагадаємо, що додаткові побудови на початковому рисунку, якими вводять нові відрізки та кути, іноді полегшують розв'язування задачі.

У задачах на обчислення має сенс спочатку, ***не проводячи обчислень, визначити, які взагалі відрізки та кути можна знайти***, виходячи з даних величин.

Як тільки до цього переліку потрапить потрібний відрізок чи кут, можна легко скласти ланцюжок послідовних обчислень, що приведе до визначення шуканої величини. Іноді такий «прямий пошук» корисно доповнити пошуком плану розв'язування задачі «від шуканого», тобто виходячи з вимоги задачі (наприклад, «щоб знайти площу вписаного круга, достатньо знайти його радіус»).

Проте ці способи не завжди вдається застосувати. У таких випадках дуже часто допомагає алгебраїчний метод розв'язування геометричних задач на обчислення, пов'язаний із введенням невідомих та складанням рівняння або системи рівнянь. У п. 2 табл. 3 наведено орієнтир, який дає змогу розпізнавати ситуації, коли потрібно вводити невідомі відрізки та кути, а також приклад відповідного розв'язання. Використовуючи цей метод *для складання рівняння до задачі, часто поряд із вираженням даних елементів через невідомі зручно величину якогось елемента з розглядуваної конфігурації виразити двічі через введені невідомі*. Крім того, не завжди, *склавши рівняння чи систему рівнянь до геометричної задачі, доцільно прагнути повністю їх розв'язати. З одержаного рівняння чи системи, у першу чергу, слід знаходити ті невідомі (чи їх комбінацію), які дозволять дати відповідь на запитання задачі* (див. розв'язання задачі 2 до цього параграфа).

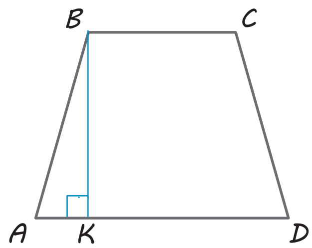
У табл. 3 (п. 3) показано можливість використання методу площ для розв'язування планіметричних задач.

Зміст та приклади застосування координатного та векторного методів для розв'язування геометричних задач дивіться в інтернет-підтримці підручника

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 У рівнобічній трапеції висота дорівнює 8 см, основи — 21 см і 9 см. Знайдіть радіус описаного навколо трапеції кола.

Зауваження. Приступаючи до розв'язування геометричної задачі, доцільно виконати відповідний *рисунок* і навести *короткий запис умови*, який дозволить пов'язати рисунок і позначення точок на ньому з величинами і співвідношеннями, заданими в умові.



Дано: $ABCD$ — трапеція;
$AD \parallel BC$, $AB = CD$,
$AB = 21$ см, $BC = 9$ см,
$BK = 8$ см $(BK \perp AD)$.

Знайти: R — радіус описаного кола.

Розв'язання	Коментар

Розв'язання

▶ Нехай у трапеції $ABCD$ (рис. 2.3) $AB = CD$, $AB = 21$ см, $BC = 9$ см, $BK = 8$ см $(BK \perp AD)$. Якщо коло проходить через чотири точки A, B, C, D, то воно також проходить через будь-які три із цих точок і тому збігається з колом, описаним навколо трикутника ABD.

Знайдемо радіус кола, описаного навколо трикутника ABD. Якщо CM — друга висота даної рівнобічної трапеції, то, ураховуючи рівність прямокутних трикутників ABK та DCM і те, що $AD \parallel BC$ і $BCMK$ — прямокутник, одержуємо:

$$AK = MD = \frac{21-9}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

Тоді з $\triangle ABK$:

$$AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = 10 \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника BKD:

$$BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 17 \text{ (см)}.$$

Таким чином, радіус кола, описаного навколо трикутника ABD (а отже, і навколо трапеції $ABCD$), дорівнює:

$$R = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{\triangle ABD}} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot BK} = 10{,}625 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 10,625 см. ◁

Коментар

Спробуємо виділити «ключовий» трикутник для розв'язування задачі. Для цього проведемо діагональ BD трапеції і згадаємо, що коло, яке проходить через вершини трикутника ABD, є описаним навколо трикутника. Обчислити його радіус можна за кількома формулами (див. «Систему опорних фактів курсу планіметрії», табл. 11 — інтернет-підтримка підручника), зокрема:

$$R = \frac{2}{2\sin A} \quad \text{та} \quad R = \frac{abc}{4S_{\triangle}}.$$

Із цих формул вибираємо ту, для якої легко знайти всі величини, що входять до її запису: $R = \frac{abc}{4S_{\triangle}}$. (Одну сторону трикутника ABD дано за умовою, а дві інші легко визначити з відповідних прямокутних трикутників.)

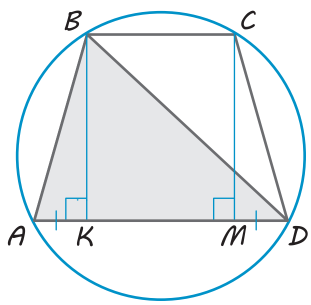


Рис. 2.3

Задача 2

Периметр прямокутного трикутника дорівнює 24 см, а його площа — 24 см². Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

Дано: $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$, $P = 24$ см, $S = 24$ см².

Знайти: R —радіус описаного кола.

Розв'язання

▶ Нехай у прямокутному трикутнику ABC (рис. 2.4) $\angle C = 90°$, $P = 24$ см, $S = 24$ см².

Позначимо $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

Записуючи дані периметр і площу та теорему Піфагора, одержуємо систему

$$\begin{cases} a + b + c = 24, \\ \frac{1}{2}ab = 24, \\ a^2 + b^2 = c^2. \end{cases}$$

Із першого рівняння $a + b = 24 - c$. Тоді

$$(a+b)^2 = (24-c)^2,$$

або

$$a^2 + b^2 + 2ab = 24^2 - 48c + c^2.$$

Підставляючи в цю рівність із другого рівняння $ab = 48$ і з третього рівняння $a^2 + b^2 = c^2$, одержуємо:

$$c^2 + 96 = 576 - 48c + c^2,$$

звідки $c = 10$ (см). Оскільки радіус описаного кола прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то $R = 5$ см.

Відповідь: 5 см. ◁

Коментар

Оскільки *в умові цієї геометричної, задачі на обчислення не дано жодного відрізка, для розв'язування такої задачі доведеться ввести невідомий відрізок* (або декілька невідомих відрізків). Щоб записати периметр трикутника, потрібно мати всі його сторони, тому введемо як невідомі всі сторони трикутника: a, b, c. Для складання рівнянь використаємо теорему Піфагора та дані периметр і площу (записавши їх через невідомі).

Оскільки *в прямокутному трикутнику радіус описаного кола дорівнює половині гіпотенузи* (див. «Систему опорних фактів курсу планіметрії», табл. 11 — інтернет-підтримка підручника), то, щоб одержати відповідь, достатньо знайти із системи рівнянь гіпотенузу c, а для цього з першого рівняння системи знайти суму $a + b$, піднести її до квадрата і використати друге та третє рівняння.

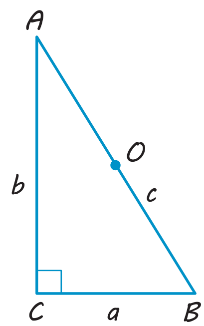


Рис. 2.4

Запитання для контролю

1. У яких випадках для розв'язування геометричної задачі на обчислення зручно вводити невідомі? Поясніть це на прикладі.
2. Поясніть, як можна використовувати метод площ для розв'язування геометричних задач. Наведіть приклад.

Вправи

2.1.° У табл. 4 «Системи опорних фактів курсу планіметрії» символічно записано наслідки з теореми косинусів. Сформулюйте ці наслідки словесно.

2.2.° Визначте вид (за кутами) трикутника зі сторонами 6 см, 8 см і 11 см.

2.3.° Дано два рівнобедрених трикутники зі спільною основою. Доведіть, що їхні медіани, проведені до основи, лежать на одній прямій.

2.4. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 12, а кут, протилежний до основи, — $120°$. Знайдіть висоти трикутника.

2.5.° У рівнобедреному трикутнику основа і висота, проведена до основи, дорівнюють 4 см. Знайдіть площу круга, описаного навколо цього трикутника.

2.6. У прямокутному трикутнику висота, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 9 і 16. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.

2.7. У трикутнику ABC зі сторонами 4 і 6 та кутом між ними $120°$ знайдіть довжину медіани, проведеної з вершини тупого кута.

2.8. У трикутнику ABC зі сторонами a і b медіани, проведені до цих сторін, взаємно перпендикулярні. Знайдіть довжину третьої сторони трикутника.

2.9.° Діагональ ромба завдовжки 10 см дорівнює його стороні. Знайдіть другу діагональ і кути ромба.

2.10. У паралелограмі $ABCD$ проведено бісектрису кута A, яка перетинає сторону BC в точці K. Знайдіть довжину відрізка BK, якщо $DC=10$ см.

2.11. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 5 см і 12 см. Знайдіть катети трикутника.

2.12. У трапеції паралельні сторони дорівнюють 25 см і 4 см, а бічні сторони — 20 см і 13 см. Знайдіть площу трапеції.

2.13. Навколо кола описано рівнобічну трапецію, бічна сторона якої ділиться точкою дотику на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть площу трапеції.

2.14. У рівнобічну трапецію з бічною стороною 17 см вписано коло, діаметр якого 15 см. Знайдіть основи трапеції.

2.15.* У трапеції, основи якої дорівнюють a і b, через точку перетину діагоналей проведено пряму, паралельну основам. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, який відтинають бічні сторони трапеції.

2.16. Три кола попарно дотикаються зовнішнім чином. Знайдіть радіуси кіл, якщо відстані між їх центрами дорівнюють 5 см, 7 см і 8 см.

2.17. У трикутнику ABC зі сторонами $AC=10$ см, $CB=20$ см і кутом ACB, що дорівнює $135°$, проведено медіану CD. Знайдіть площу трикутника ACD.

2.18. У трапеції $ABCD$ $(BD \parallel AD)$ діагоналі перетинаються в точці O. Доведіть, що площі трикутників ABO і COD дорівнюють одна одній (тобто ці трикутники рівновеликі).

2.19. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, висота якої дорівнює 10 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні.

2.20.* Доведіть, що сума відстаней від точки, узятої всередині правильного трикутника, до його сторін дорівнює висоті цього трикутника.

2.21. У трикутнику ABC кут A прямий, кут B дорівнює $30°$. У трикутник вписано коло, радіус якого дорівнює $\sqrt{3}$. Знайдіть відстань від вершини C до точки N дотику цього кола до катета AB.

2.22. Середня лінія трапеції дорівнює 10 і ділить площу трапеції у відношенні 3 : 5. Знайдіть довжини основ цієї трапеції.

2.23. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 42 і 18, а висота — 16. Знайдіть довжину описаного навколо трапеції кола.

2.24. У трапеції $ABCD$ з основами AB і CD діагоналі перетинаються в точці E. Знайдіть площу трикутника BCE, якщо $AB = 30$, $DC = 24$, $AD = 3$ і $\angle DAB = 60°$.

2.25. У трапецію $ABCD$ з основами AD і BC вписано коло із центром в точці O. Знайдіть площу трапеції, якщо $\angle DAB = 90°$, $OC = 2$ і $OD = 4$.

2.26. Одна з діагоналей паралелограма розбиває його на два рівносторонні трикутники зі стороною a. Знайдіть довжину другої діагоналі.

2.27. Знайдіть площу паралелограма, якщо його діагоналі дорівнюють 3 і 5, а гострий кут — 60°.

2.28. Висота ромба дорівнює 12, а одна з його діагоналей — 15. Знайдіть площу ромба.

2.29. На площині розміщено квадрат $ABCD$ і точку O. Відомо, що $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$ і площа квадрата більша за 225. Знайдіть сторону квадрата і з'ясуйте, де розміщена точка O — усередині чи зовні квадрата.

2.30. Квадрат зі стороною 3 см зрізали по кутах так, що утворився правильний восьмикутник. Знайдіть сторону восьмикутника.

Виявіть свою компетентність

2.31. Самостійно опрацюйте застосування координатного та векторного методів розв'язування геометричних задач (за посиланням на с. 34). Обговоріть з друзями та подругами, як оцінити доцільність використання того чи іншого методу для розв'язування певної задачі.

§ 3 НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ

Таблиця 4

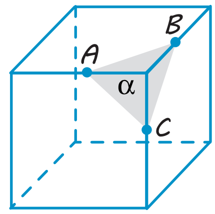
Переріз многогранника площиною

Означення і зміст побудови

Перерізом **многогранника площиною називається многокутник, який є спільною частиною многогранника і цієї площини.**

Для побудови перерізу достатньо побудувати відрізки перетину січної площини з відповідними гранями многогранника, а для цього потрібно побудувати точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (або з їх продовженнями).

Приклад



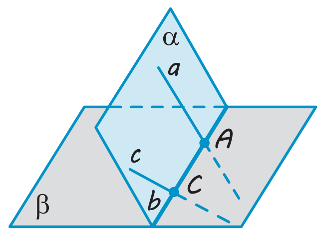
Перерізом куба площиною α, яка проходить через точки A, B, C на ребрах куба, що виходять з однієї вершини, є трикутник ABC.

Побудова перерізів методом слідів

Основні поняття

Якщо площина α перетинає площину β по прямій b, то пряму b називають *слідом площини* α на площині β.

Для того щоб отримати слід площини α на площині β (тобто пряму b), достатньо знайти точки перетину двох прямих площини α з площиною β.



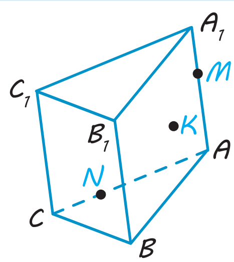
Приклад

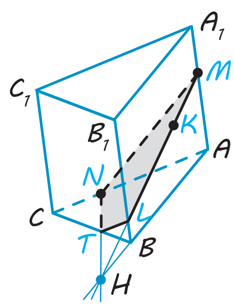
Побудуйте переріз призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через точки K, M, N, де $M \in AA_1$, $N \in AC$ і точка K лежить у грані AA_1B_1B.

Розв'язання

▶

1. Розглянемо допоміжну площину AA_1B_1B. Слід цієї площини на площині основи — пряма AB.
2. У допоміжній площині розглянемо пряму MK, яка лежить у площині перерізу. Точка її перетину з площиною ABC лежить на прямій AB — це точка H (а точка перетину з ребром BB_1 — точка L).
3. Тоді точка H лежить і в площині перерізу, і в площині ABC. За умовою точка N теж лежить і в площині перерізу, і в площині ABC. Отже, площина перерізу перетинає площину основи по прямій HN (слід січної площини на площині ABC), яка перетинається з прямою BC у точці T.
4. Сполучаючи відрізками точки перетину січної площини з ребрами призми, одержуємо чотирикутник $MNTL$ — шуканий переріз. ◁





ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Зміст задач на побудову в стереометрії

У планіметрії задачі на побудову найчастіше розв'язували з використанням циркуля і лінійки. За їх допомогою можна будувати відповідні фігури площини (прямі, кола, трикутники тощо). Але не існують креслярські інструменти, які дозволяли б у просторі будувати неплоскі фігури. Із цієї причини завдання на побудову в стереометрії за своїм змістом суттєво відрізняються від конструктивних завдань планіметрії. Стереометричні побудови виконують, у першу чергу, подумки. Це здебільшого завдання на доведення існування фігури, що задовольняє дані умови. Таке доведення повинно спиратися на відповідні аксіоми та властивості стереометричних фігур.

Задачі на побудову в стереометрії можна умовно поділити на дві групи: *задачі на уявлювані побудови* (наприклад, провести площину через пряму і точку поза нею) і задачі на зображеннях просторових тіл — так звані *задачі на проекційному рисунку*. Розв'язування стереометричних задач на побудову зазвичай супроводжують рисунками. Існує два принципово різних типи таких рисунків. Для задач на уявлювані побудови це, як правило, ескізний рисунок, що ілюструє основні етапи побудови. Під час його виконання допускається певна довільність, якщо вона не приводить до суперечностей з умовою задачі (це, наприклад, рисунки 1.3, 1.5–1.10, 1.15–1.16). Другий тип рисунка до задачі — це плоске зображення на проекційному рисунку, виконане з урахуванням властивостей паралельного проектування[1]. Побудови на проекційному рисунку однозначно відповідають просторовим побудовам зображуваної фігури в оригіналі.

2 Задачі на побудову перерізів многогранників. Метод слідів

Під час розв'язування деяких стереометричних задач, пов'язаних із многогранником, доводиться будувати фігуру, що є перетином многогранника з площиною. Якщо такою фігурою є многокутник, то його називають перерізом[2] многогранника.

Інакше кажучи, ***перерізом многогранника площиною*** **називається многокутник, який є спільною частиною многогранника і площини.**

Цю площину ще називають *січною площиною*.

У таких задачах зазвичай дано многогранник (тобто зображення многогранника) і потрібно побудувати переріз (тобто зображення перерізу) площиною, яка задана певним чином, найчастіше трьома точками. *Для побудови перерізу достатньо побудувати відрізки перетину січної площини з відповідними гранями многогранника.* Для цього потрібно побудувати точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (або з їх продовженнями).

Наприклад, дано зображення куба і три точки A, B, C, які належать ребрам, що виходять з однієї вершини (рис. 3.1). Для побудови перерізу куба площиною α, яка проходить через ці точки, достатньо сполучити їх відрізками.

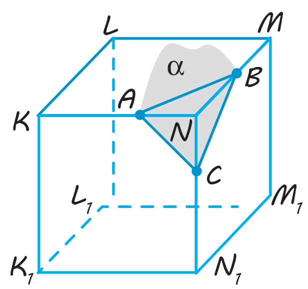


Рис. 3.1

[1] Властивості паралельного проектування буде розглянуто в § 7.

[2] Детальніше побудову перерізів многогранників див. у § 8.

Дійсно, площина α має з площиною KNN_1K_1 передньої грані куба дві спільні точки *A* і *C*. Отже, *AC* — пряма перетину цих площин, а значить, площина α перетинає передню грань — квадрат KNN_1K_1 по відрізку *AC*. Аналогічно дана площина α перетинає верхню грань по відрізку *AB*, а бічну грань — по відрізку *BC*. Отже, трикутник *ABC* і є шуканим зображенням перерізу куба.

У складніших випадках для побудови перерізу многогранника часто буває зручним побудувати спочатку *пряму перетину січної площини з площиною якоїсь грані* (так званий *«слід» січної площини на цій грані*), а потім знайти точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (чи з їх продовженнями). Іноді доводиться розглядати певні допоміжні площини, для яких також будують слід січної площини (або слід допоміжної площини на площині якоїсь грані). Цей метод побудови перерізів називають *методом слідів*.

Як ви вважаєте, які аксіоми стереометрії покладені в основу методу слідів?

Для того щоб отримати слід площини α *на площині* β (рис. 3.2), *тобто пряму b, достатньо знайти точки перетину двох прямих площини* α *з площиною* β (оскільки дві точки, наприклад, *A* і *C*, однозначно визначають пряму *b*). Зазначимо також, *що точка перетину будь-якої прямої a площини* α *з площиною* β *завжди належить сліду площини* α *на площині* β (тобто прямій *b*).

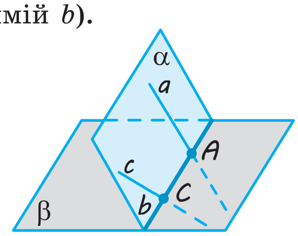


Рис. 3.2

Приклад застосування методу слідів для побудови перерізу призми наведено в табл. 4, а методу слідів і допоміжних площин для побудови перерізу піраміди — нижче.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Задача*

Побудуйте переріз піраміди *ABCD* площиною, що проходить через точки *K*, *L*, *M* (рис. 3.3, *а*), де $L \in AC$, а точки *K* і *M* лежать у гранях *ABD* і *BCD* відповідно.

Розв'язання[1]

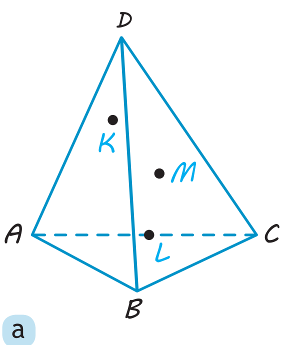


Рис. 3.3

Відразу побудувати «слід» площини перерізу на якійсь із граней неможливо. Розглянемо допоміжну площину *DKM*. Спочатку знайдемо слід цієї площини на площині основи *ABC*. Для цього знайдемо точки перетину з площиною основи двох прямих *DK* і *DM* допоміжної площини. Оскільки точка *K* лежить у площині *ABD*, то пряма *DK* перетинає пряму *AB* (а значить, і площину *ABC*) у деякій точці *E* (рис. 3.3, *б*). Аналогічно точка *F* перетину прямої *DM* із прямою *BC* є точкою перетину прямої *DM* із площиною основи. Отже, слід допоміжної площини на площині основи — це пряма *EF*.

Далі розглянемо в допоміжній площині *DKM* пряму *KM*. Оскільки точка перетину прямої *KM* із площиною основи лежить на прямій *EF* (на сліді допоміжної площини), то знаходимо точку *P* перетину прямих *KM* і *EF*. Це і буде точка перетину прямої *KM* з площиною основи *ABC*.

Точка *P* лежить у площині перерізу і в площині *ABC*. Але в цій самій площині лежить і точка *L*. Отже, площина перерізу

[1] Коментар включено в запис розв'язання.

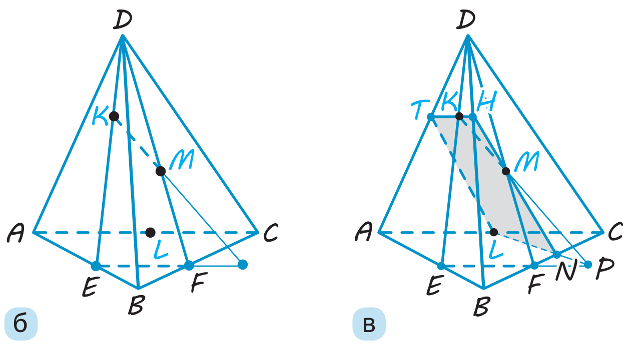


Рис. 3.3. Закінчення

перетинає площину основи по прямій LP (рис. 3.3, *в*), що перетинається з прямою BC в точці N. Тепер можемо послідовно знайти точки перетину площини перерізу з іншими ребрами піраміди. Точки N і M лежать у площині перерізу та в грані BCD. Тоді пряма NM перетинає ребро BD у точці H — це і буде наступна вершина многокутника перерізу. Аналогічно в площині ABD проводимо пряму HK, яка перетинає ребро AD у точці T, і сполучаємо відрізком точки T і L. Чотирикутник $LNHT$ — шуканий переріз. ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть, що називають перерізом многогранника площиною. Якою фігурою є переріз многогранника?
2. Поясніть, що називають слідом площини α на площині β. Як можна одержати цей слід, маючи декілька прямих у площині α?
3. Поясніть на прикладі, як можна побудувати переріз многогранника методом слідів.

Вправи

3.1° Користуючись зображенням куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, наведеним на рис. 3.4, назвіть:
1) точку перетину прямої MC $(M \in AA_1)$ із площиною B_1BC_1;
2) лінію перетину площин MC_1C і BCB_1.

3.2° За зображенням піраміди, наведеним на рис. 3.5, назвіть:
1) точку перетину прямої MD $(M \in BD)$ і площини ABC;
2) лінію перетину площин MBC і BEC $(E \in AC)$.

3.3° Нарисуйте в зошиті зображення куба, наведене на рис. 3.6, і побудуйте:
1) точку перетину прямої MH із площиною ABC;
2) лінію перетину площин MHC і ADC.

3.4 Нарисуйте в зошиті зображення піраміди, наведене на рис. 3.7, і побудуйте:
1) точку перетину прямої MH з площиною ABC;
2) лінію перетину площин MHB і ABC.

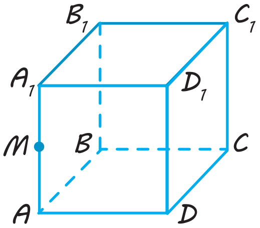


Рис. 3.4

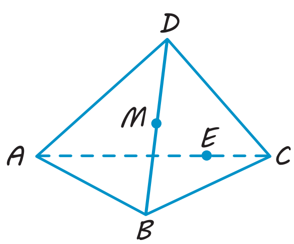


Рис. 3.5

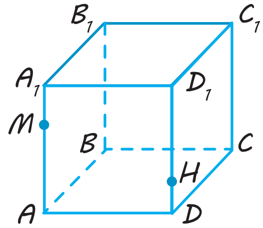


Рис. 3.6

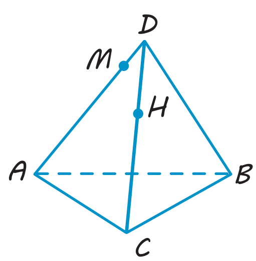


Рис. 3.7

3.5.° Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через:
1) точки A_1, B і C_1;
2) точки B, D і середину ребра CC_1.

3.6.° Побудуйте переріз піраміди $ABCD$ площиною, що проходить через:
1) точки C і D та середину ребра AB;
2) точку C та середини ребер AB і BD.

3.7.° Користуючись рис. 3.8, опишіть побудову перерізу трикутної піраміди $SKLM$ площиною, що проходить через точки A, B, C ($A \in KM$, $B \in SK$, $C \in SL$). Обґрунтуйте побудову, спираючись на відповідні аксіоми і теореми.

3.8. Чи може перерізом тетраедра $ABCD$ площиною бути чотирикутник $KLMN$, зображений на рис. 3.9?

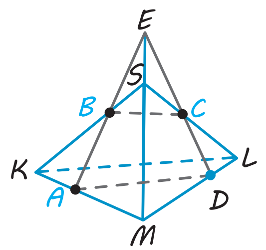


Рис. 3.8

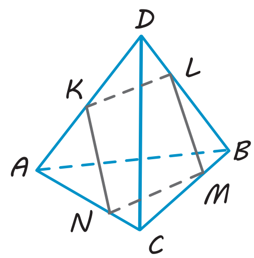


Рис. 3.9

3.9. Нарисуйте в зошиті зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.10) і побудуйте:

1) точку перетину прямої D_1M із площиною основи $ABCD$ ($M \in CC_1$, і $CM = \frac{1}{2}CC_1$);

2) точку перетину прямої D_1K із площиною основи $ABCD$ ($K \in AA_1$ і $AK = \frac{1}{5}AA_1$);

3) слід площини D_1KM на площині основи $ABCD$;

4) переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки D_1, K і M.

3.10.* Нарисуйте в зошиті зображення піраміди $ABCD$ (рис. 3.11) і побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через точки K, L і M, які розташовані на гранях ABD, BCD і ACB відповідно.

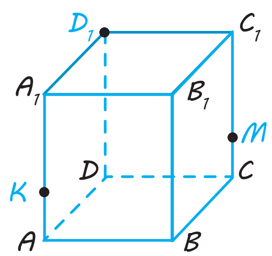


Рис. 3.10

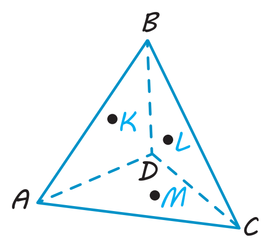


Рис. 3.11

3.11. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ із ребром a точка O — точка перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра DC; точка M лежить на промені BB_1, $B_1M = 2a$. Побудуйте переріз куба площиною OKM.

3.12. Побудуйте переріз піраміди $ABCD$ площиною, яка проходить через точки K, M, N, де K і M — середини ребер DC і BC, а N — точка ребра AB така, що $AN = \frac{1}{3}AB$.

3.13. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середини M, N, K його ребер AD, DC, BB_1.

3.14. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середини K, L, M його ребер AA_1, CC_1, DC.

3.15. На рисунках 3.12–3.23 вказано точки M, P і R, які лежать або на ребрах, або на гранях куба. Побудуйте переріз куба площиною MRP для кожного із даних розміщень точок.

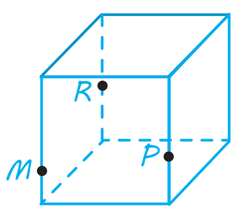


Рис. 3.12

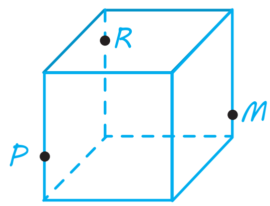


Рис. 3.13

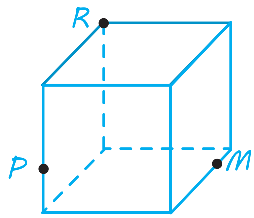


Рис. 3.14

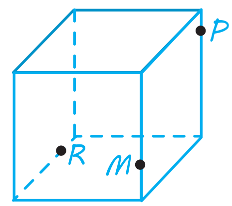


Рис. 3.15

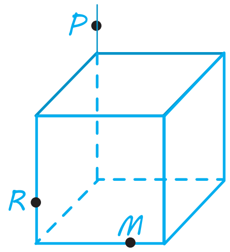


Рис. 3.16

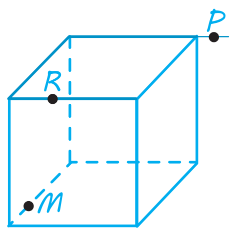


Рис. 3.17

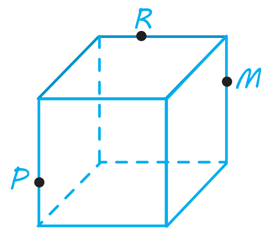


Рис. 3.18

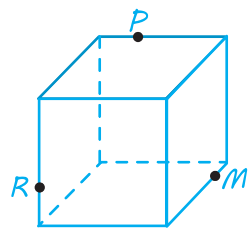


Рис. 3.19

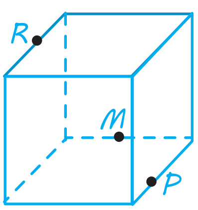
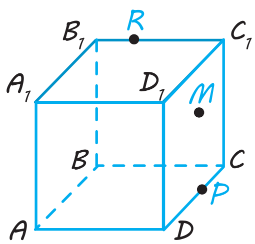
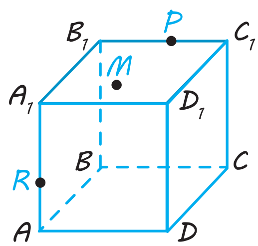


Рис. 3.20



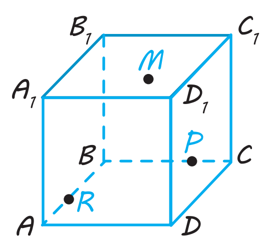
$M \in$ пл. BB_1C_1

Рис. 3.21



$M \in$ пл. $A_1B_1C_1$

Рис. 3.22



$M \in$ пл. $A_1B_1C_1$

Рис. 3.23

3.16* Ребро правильного тетраедра $MABC$ дорівнює 18. Точки P і K є відповідно серединами ребер AM і BM, а точка T ділить ребро MC у відношенні $MT:TC = 4:1$. Знайдіть відстань від вершини C до прямої перетину площин TPK і ABC.

3.17* У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ довжина ребра дорівнює 4. Точка M належить ребру AA_1, $AM = 3$, точка P належить ребру CC_1, $PC_1 = 1$, точка K ділить ребро DD_1 у відношенні $1:3$, починаючи від точки D. Знайдіть відстань від вершини B до прямої перетину площин KMP і ADC.

ПЕРЕВІРЯЄМО ЗАСВОЄННЯ МАТЕРІАЛУ З ТЕМИ

Тест № 1

1. Пряма a лежить у площині α. Який знак потрібно поставити замість зірочки в записі $a * \alpha$?

А $\in$ **Б** $\subset$ **В** $\supset$ **Г** $\cup$

2. Відомо, що площини α і β мають спільну точку. Скільки ще спільних точок мають ці площини?

А Одну **Б** Дві **В** Безліч **Г** Жодної

3. Скільки площин можна провести через дві точки?

А Тільки одну **Б** Тільки дві **В** Безліч **Г** Жодної

4. Шість точок не лежать в одній площині. Яка найбільша кількість цих точок може лежати на одній прямій?

А Три **Б** Чотири **В** П'ять **Г** Шість

5. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Серед даних прямих укажіть таку, яка не лежить у площині BCD.

А AC **Б** AD **В** CD **Г** BD

6. Пряма a перетинає площину α і лежить у площині β. Скільки спільних точок мають площини α і β?

А Одну **Б** Дві **В** Жодної **Г** Безліч

7. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Якщо діаметр кола належить площині, то всі точки кола належать цій площині.

II. Якщо три вершини паралелограма належать площині, то всі точки паралелограма належать цій площині.

III. Якщо пряма має спільну точку з кожною зі сторін AC і BC трикутника ABC, то вона лежить у площині цього трикутника.

IV. Якщо бісектриса трикутника та центр кола, вписаного в даний трикутник, належать площині, то всі точки трикутника належать цій площині.

А Усі твердження є правильними **В** Тільки II

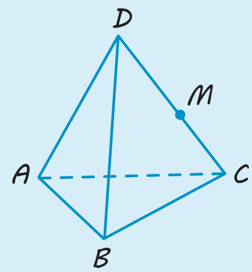
Б Тільки II і III **Г** Тільки IV

8. Дано п'ять точок A, B, M, N і K. Площина α проходить через точки A і B, але не проходить через жодну з точок M, N і K. Серед даних точок укажіть таку, яка не може належати прямій AM.

А Точка B **В** Точка K

Б Точка N **Г** Будь-яка з даних точок може належати прямій AM

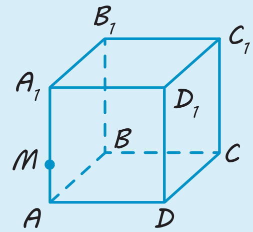
9. На ребрі DC тетраедра $DABC$ позначили точку M (див. рисунок). Укажіть пряму перетину площин AMB і ADC.



А AB **В** AC

Б CD **Г** AM

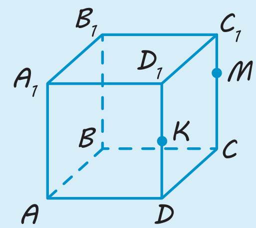
10. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M належить ребру AA_1. Серед даних прямих укажіть таку, якій належить точка перетину прямої BM із площиною $A_1D_1C_1$.



А A_1C_1 **В** B_1C_1

Б A_1B_1 **Г** A_1D_1

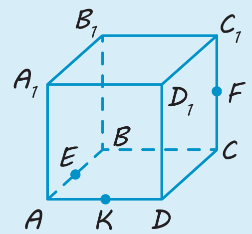
11. Точки M і K належать ребрам CC_1 і DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відповідно (див. рисунок). Укажіть лінію перетину площин CC_1D_1 і AMK.



А MK **В** BM

Б AK **Г** Площини не перетинаються

12. Точки E, F і K є серединами ребер AB, CC_1 і AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відповідно (див. рисунок). Скільки ребер куба перетинає площина EFK?



А 3 **В** 5

Б 4 **Г** 6

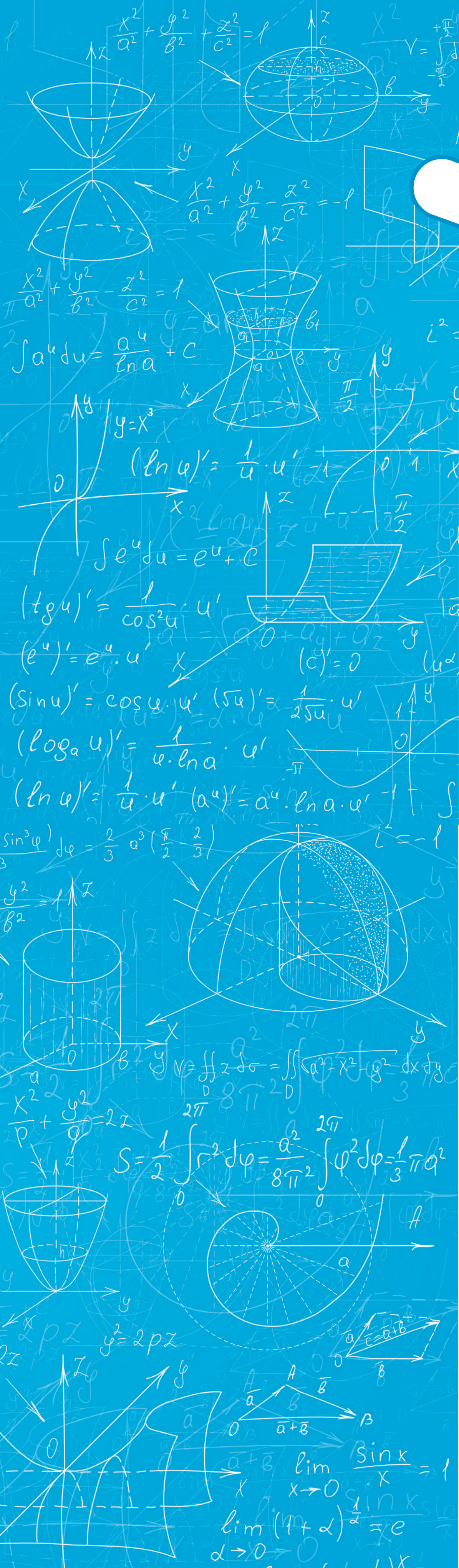
Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

Навчальний проект № 1
АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Учні класу об'єднуються в три групи: «історики», «математики», «практики». Кожний учень може взяти участь у роботі однієї або двох проектних груп.

- «*Історики*» досліджують виникнення і розвиток сучасної системи аксіом.
- «*Математики*» опановують матеріал стосовно альтернативних систем аксіом.
- «*Практики*» досліджують практичне застосування теоретичних тверджень системи аксіом евклідової геометрії.

Результати роботи над проектом члени кожної групи оформлюють у вигляді комп'ютерної презентації.



Розділ 2

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

У цьому розділі ви:

- ознайомитеся з паралельністю прямих і площин у просторі, поняттям і властивостями паралельного проектування;
- навчитеся застосовувати властивості паралельності прямих і площин для розв'язування задач та будувати зображення просторових фігур на площині за допомогою паралельного проектування;
- навчитеся розв'язувати складніші задачі на побудову перерізів призми та піраміди.

§4 РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ: ПРЯМІ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ, ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ, МИМОБІЖНІ ПРЯМІ

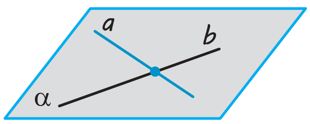
Таблиця 5

Розміщення двох прямих у просторі

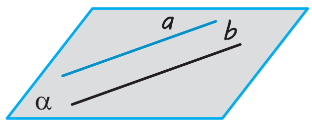
Дві прямі

лежать в одній площині

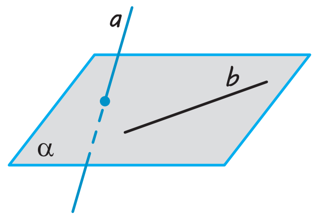
мають спільну точку (перетинаються)



не мають спільної точки (паралельні)



не лежать в одній площині (мимобіжні)



ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Мимобіжні прямі

Якщо дві прямі лежать в одній площині, то, як відомо з курсу планіметрії, вони або перетинаються, або паралельні (див. відповідні рисунки в табл. 5). У стереометрії можливий ще один випадок — прямі не лежать в одній площині і не перетинаються (див. рисунок в табл. 5 та рис. 4.1).

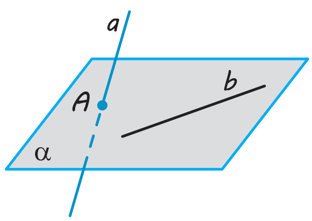


Рис. 4.1

> **Означення. Дві прямі в просторі називаються мимобіжними, якщо вони не лежать в одній площині.**

Будемо казати також, що два відрізки мимобіжні, якщо вони лежать на мимобіжних прямих.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.2) ребра DD_1 і B_1C_1 мимобіжні.

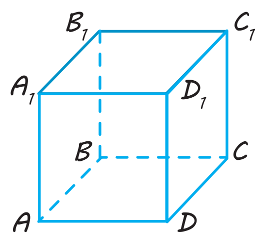


Рис. 4.2

Наступну теорему називають *ознакою мимобіжних прямих*, оскільки вона визначає достатні умови для того, щоб прямі були мимобіжні.

> **Теорема 4.1. Якщо одна пряма лежить у даній площині, а друга пряма перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то ці прямі мимобіжні.**

Доведення. Нехай пряма b лежить у площині α, а пряма a перетинає площину α в точці A, яка не належить

Наочне уявлення про мимобіжні прямі дають дві прямолінійні дороги, одна з яких проходить по естакаді, а інша — під естакадою, та різні елементи будівельних конструкцій.

прямій b (рис. 4.1). Якщо припустити, що прямі a і b лежать в одній площині, то в цій площині лежить і точка A (яка належить прямій a). Але через пряму b і точку A проходить єдина площина, тому розглядуваною площиною буде площина α. Тоді пряма a повинна лежати в площині α, що суперечить умові. Отже, прямі a і b не лежать в одній площині, тобто вони мимобіжні. ○

Наприклад, у піраміді $ABCD$ (рис. 4.3) ребра AD і BC мимобіжні, оскільки пряма BC лежить у площині ABC, а пряма AD перетинає цю площину в точці A, яка не належить прямій BC.

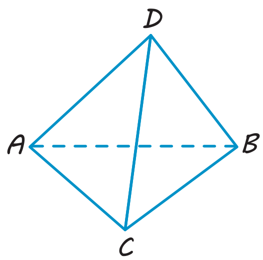


Рис. 4.3

2 Паралельні прямі в просторі

Нагадаємо, що дві прямі на площині називаються паралельними, якщо вони не перетинаються. Для паралельності прямих у просторі потрібно, щоб вони не тільки не перетиналися, але ще й лежали в одній площині.

Означення. **Дві прямі в просторі називаються паралельними, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.**

Наочне уявлення про паралельні прямі дають колони будівлі, корабельний ліс, колоди дерев'яного зрубу.

Як і в планіметрії, будемо казати, що два відрізки паралельні, якщо вони лежать на паралельних прямих. Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AD і A_1D_1 паралельні (рис. 4.2).

? Як ви вважаєте, чому в корабельному лісі стовбури дерев паралельні один одному?

Як відомо, на площині через точку поза даною прямою можна провести єдину пряму, паралельну даній прямій (аксіома паралельних). Аналогічне твердження має місце і в просторі, тільки тут його вже потрібно доводити.

Теорема 4.2. **Через точку в просторі, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.**

Доведення. Нехай точка B не належить прямій a. Проведемо через цю пряму і точку B площину α (рис. 4.4). Ця площина — єдина. У площині α через точку B проходить єдина пряма, назвемо її b, яка паралельна прямій a. Вона і буде єдиною шуканою прямою, яка паралельна даній. ○

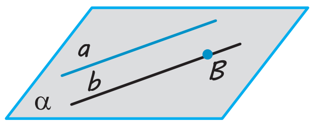


Рис. 4.4

З означення паралельності прямих у просторі й теореми 4.2 випливає, що *через дві різні паралельні прямі в просторі можна провести площину, і до того ж тільки одну*. Отже, до відомих із § 1 способів задавання площини можна додати ще один: *площину можна задати двома паралельними прямими*.

Як і на площині, має місце так звана *властивість транзитивності* паралельності прямих, яка виражає також *ознаку паралельності прямих*. Для паралельності прямих транзитивність означає: **«Якщо пряма a паралельна прямій b, а пряма b паралельна прямій c, то пряма a паралельна прямій c».**

Транзитивність — від латин. *transitivus* — перехідний — одна з властивостей логічного відношення величин.

Теорема 4.3. **Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні.**

Доведення. Нехай прямі b і c паралельні прямій a. Доведемо, що прямі b і c паралельні.

Випадок, коли прямі a, b, c лежать в одній площині, було розглянуто в планіметрії. Тому припустимо, що наші прямі не лежать в одній площині. Нехай паралельні прямі a і c лежать у площині α, а паралельні прямі a і b — у площині β. Площини α і β різні (рис. 4.5).

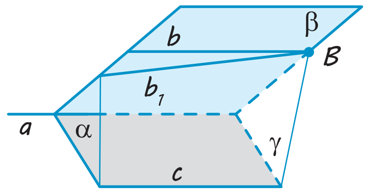


Рис. 4.5

Візьмемо на прямій b довільну точку B і проведемо площину γ через пряму c і точку B. Вона перетне площину β по деякій прямій b_1. Пряма b_1 не перетинає площину α (а значить, і пряму c). Дійсно, якщо припустити, що пряма b_1 перетинає площину α, то точка перетину повинна належати прямій a, оскільки пряма b_1 лежить у площині β. З іншого боку, вона повинна лежати на прямій c, оскільки пряма b_1 лежить у площині γ. Але прямі a і c паралельні і не перетинаються. Тоді пряма b_1 лежить у площині β і не перетинає пряму a. Тому вона паралельна прямій a, а значить, збігається з прямою b за аксіомою паралельних. Таким чином, пряма b, що збігається з прямою b_1, лежить в одній площині з прямою c (у площині γ) і не перетинає її. Отже, прямі b і c паралельні. ○

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.6) ребра AB і D_1C_1 паралельні, оскільки кожне з них паралельне ребру DC.

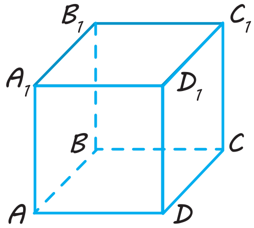


Рис. 4.6

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Прямі a і b перетинаються. Доведіть, що всі прямі, які паралельні прямій a і перетинають пряму b, лежать в одній площині.

Розв’язання

▶ Оскільки прямі a і b перетинаються, через них можна провести єдину площину α. Нехай деяка пряма c паралельна прямій a і перетинає пряму b в точці B (рис. 4.7). Проведемо в площині α через точку B пряму $c' \parallel a$. Але за теоремою 4.2 через точку B проходить єдина пряма, паралельна прямій a. Отже, пряма c збігається з прямою c', тобто пряма c лежить у площині α. ◁

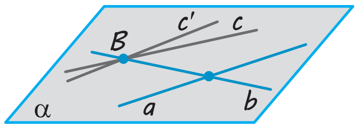


Рис. 4.7

Коментар

Спочатку, користуючись властивістю, що через дві прямі, які перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну, побудуємо площину, яка проходить через дані прямі.

Потім доведемо, що будь-яка пряма, яка перетинає одну пряму і паралельна другій, лежить у цій площині.

Зауваження. Одержаний результат можна коротко сформулювати так: **усі прямі, які паралельні між собою і перетинають дану пряму, лежать в одній площині.**

Задача 2

Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках A_1, B_1 і M_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо відрізок AB не перетинає площину і $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 6$ см.

Розв’язання

▶ Оскільки паралельні прямі AA_1, BB_1, MM_1, які перетинають пряму AB, лежать в одній площині, то точки A_1, M_1 і B_1 лежать на одній прямій (рис. 4.8, *б*), і ми одержуємо плоский чотирикутник ABB_1A_1, який є трапецією $(AA_1 \parallel BB_1)$.

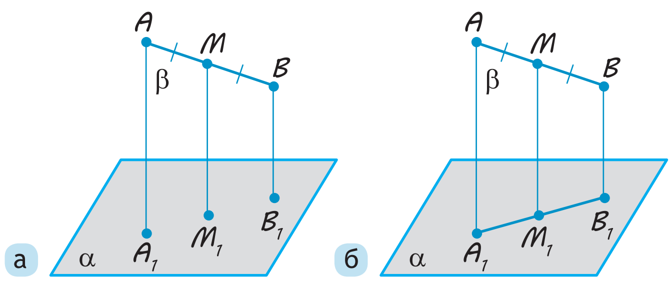


Рис. 4.8

Коментар

Для побудови рисунка до задачі потрібно використати результат задачі 1. Оскільки пряма AA_1 перетинає пряму AB, а прямі MM_1 і BB_1 паралельні прямій AA_1, то всі вони лежать в одній площині β (рис. 4.8, *а*). Тоді площина β перетинає дану площину α по прямій A_1B_1, на якій лежать усі спільні точки цих площин, зокрема і точка M_1.

За умовою точка M — середина відрізка AB і $MM_1 \parallel AA_1$. Тоді за теоремою Фалеса точка M_1 — середина A_1B_1. Отже, MM_1 — середня лінія трапеції і

$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{8+6}{2} = 7 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 7 см. ◁

Отже, на рисунку точки A_1, M_1 і B_1 повинні лежати на одній прямій (рис. 4.8, *б*). Фактично після побудови правильного рисунка одержуємо планіметричну задачу в площині β.

Задача 3*

Доведіть, що відрізки, які сполучають середини мимобіжних сторін просторового чотирикутника, перетинаються і точкою перетину діляться навпіл (вершини просторового чотирикутника не лежать в одній площині).

Розв'язання

▶ Нехай $ABCD$ — даний просторовий чотирикутник, а точки A_1, B_1, C_1 і D_1 — середини його сторін (рис. 4.9). Тоді A_1B_1 — середня лінія трикутника ABC, отже, $A_1B_1 \parallel AC$ і $A_1B_1 = \frac{1}{2}AC$. Аналогічно C_1D_1 — середня лінія трикутника ACD отже, $C_1D_1 \parallel AC$ і $C_1D_1 = \frac{1}{2}AC$. Тоді за теоремою 4.3 $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ (і тому A_1B_1 і C_1D_1 лежать в одній площині) і, крім того, $A_1B_1 = C_1D_1$. Таким чином, чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ лежить в одній площині і дві його протилежні сторони паралельні й рівні. Отже, це паралелограм, а тому його діагоналі A_1C_1 і B_1D_1 перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. ◁

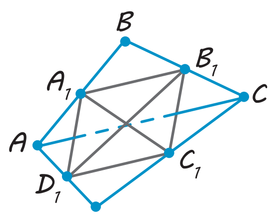


Рис. 4.9

Коментар

Для того щоб скласти план розв'язування, достатньо згадати, що коли два відрізки перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то їхні кінці є вершинами паралелограма (для якого ці відрізки є діагоналями).

Тому для доведення твердження задачі достатньо довести, що кінці даного відрізка є вершинами паралелограма, а потім використати властивість діагоналей паралелограма.

Запитання для контролю

1. Які прямі в просторі називаються паралельними?
2. Які прямі називаються мимобіжними?
3. Поясніть, які дві прямі в просторі будуть непаралельними.
4. Сформулюйте ознаку мимобіжних прямих.
5*. Доведіть ознаку мимобіжних прямих.
6. Доведіть, що через точку поза даною прямою в просторі можна провести пряму, паралельну цій прямій, і до того ж тільки одну.
7*. Доведіть ознаку паралельності прямих.

Вправи

4.1. Запишіть пари мимобіжних ребер:
1) у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$;
2) у призмі $ABCA_1B_1C_1$;
3) у піраміді $SABCD$.

4.2.° Дано дві площини, які перетинаються. У кожній з них лежить пряма, що перетинає лінію перетину площин. Як можуть бути розташовані ці дві прямі одна відносно одної?

4.3.° Чи правильним є твердження, що коли дві прямі лежать у різних площинах, вони завжди мимобіжні?

4.4. Пряма a мимобіжна з прямою b, а пряма b мимобіжна з прямою c. Чи випливає звідси, що прямі a і c завжди мимобіжні?

4.5. Точка A не належить прямій a. Проведіть через точку A пряму b так, щоб прямі a і b були мимобіжними.

4.6. Доведіть, що коли прямі AC і BD мимобіжні, то прямі AB і CD теж мимобіжні.

4.7. Доведіть, що площина, яка проходить через одну з двох мимобіжних прямих і точку на другій прямій, перетинає другу пряму.

4.8. Через дану точку простору проведіть пряму, яка перетинає кожну з двох даних мимобіжних прямих. Чи завжди це можливо?

4.9. Скільки пар мимобіжних прямих визначається різними парами з:
1) чотирьох точок;
2) п'яти точок;
3*) n точок, ніякі чотири з яких не належать одній площині?

4.10.° Запишіть пари паралельних ребер:
1) у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$;
2) у призмі $ABCA_1B_1C_1$;
3) у правильній піраміді $SABCD$.

4.11. Доведіть, що через дві паралельні прямі проходить єдина площина.

4.12. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині.

4.13. Відомо, що в площині пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу. Чи буде це твердження правильним і для простору?

4.14. Доведіть, що коли площина перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.

4.15.° Прямі a і b не лежать в одній площині. Чи можна провести пряму c, паралельну і прямій a, і прямій b?

4.16. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 — також паралелограм.

4.17. Через кінці відрізка CD і його середину N проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках C_1, D_1 і N_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка NN_1, якщо відрізок CD не перетинає площини і:
1) $CC_1 = 3$ м, $DD_1 = 5$ м;
2) $CC_1 = 2{,}5$ дм, $DD_1 = 3{,}5$ дм;
3) $CC_1 = a$, $DD_1 = b$.

4.18*. Розв'яжіть задачу 6.17 за умови, що відрізок CD перетинає площину.

4.19. Через кінець A відрізка AB проведено площину α. Через кінець B і точку C цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1. Знайдіть довжину відрізка BB_1, якщо $AC = 6$ см, $BC = 4$ см, $CC_1 = 3$ см.

4.20. Доведіть, що середини сторін просторового чотирикутника є вершинами паралелограма (вершини просторового чотирикутника не лежать в одній площині).

4.21. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка O — центр грані $ABCD$, а точка O_1 — центр грані $A_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що пряма OO_1 паралельна прямій AA_1.

4.22*. Дано паралелограм $ABCD$ і площину, яка не перетинає його. Через вершини паралелограма і точку O перетину діагоналей цього паралелограма проведено паралельні прямі, які перетинають дану площину в точках A_1, B_1, C_1, D_1, O_1. Доведіть, що $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 4OO_1$.

4.23*. Три площини попарно перетинаються. Доведіть, що лінії їх перетину або перетинаються в одній точці, або паралельні.

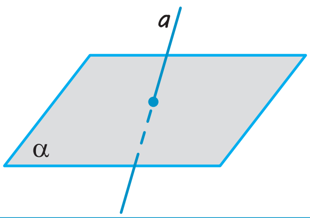
§ 5 ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Таблиця 6

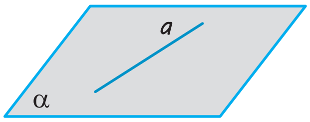
Взаємне розміщення прямої та площини в просторі

Пряма та площина

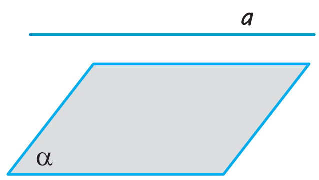
- **мають спільні точки**
  - мають тільки одну спільну точку (перетинаються)



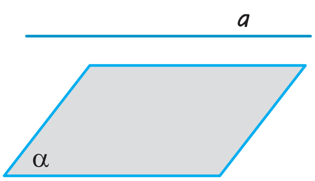
  - мають більше ніж одну спільну точку (пряма лежить у площині)



- **не мають спільних точок (паралельні)**
  - не мають спільної точки (паралельні)

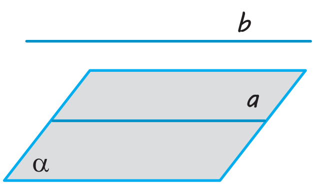


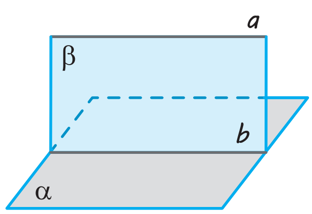
Паралельність прямої та площини



Пряма та площина називаються паралельними, якщо вони не мають жодної спільної точки.

Ознака	Властивість
Якщо $b \parallel a$ (a лежить у площині α), то $b \parallel \alpha$.	Якщо $a \parallel \alpha$, β проходить через a, β перетинає α по b, то $a \parallel b$.





ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Згадаємо, як можуть розміщуватися пряма і площина одна відносно одної.

Пряма може лежати в площині, тобто всі точки прямої належать площині. Пряма може перетинати площину, тобто мати з площиною тільки одну спільну точку. Нарешті, пряма може не перетинати площину, тобто не мати з площиною жодної спільної точки (див. схему в табл. 6).

Означення. **Пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають жодної спільної точки.**

Будемо вважати також, що відрізок паралельний площині, якщо він лежить на прямій, паралельній площині.

Наочне уявлення про пряму, паралельну площині, дає деяке спортивне знаряддя, наприклад, гімнастична перекладина паралельна площині підлоги.

Наступна теорема пов'язує поняття паралельності прямої та площини з поняттям паралельності двох прямих і визначає достатню умову паралельності прямої та площини.

Теорема 5.1 (ознака паралельності прямої та площини). Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна будь-якій прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.

Доведення. Нехай пряма b не лежить у площині α і паралельна прямій a,

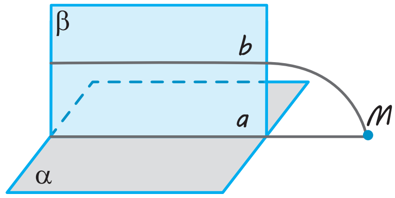


Рис. 5.1

яка лежить у цій площині (рис. 5.1). Доведемо, що пряма b паралельна площині α. Припустимо протилежне, тобто що пряма b перетинає площину α в деякій точці M. Розглянемо площину β, яка проходить через паралельні прямі a і b ($a \parallel b$ за умовою). Точка M лежить як у площині α, так і в площині β, а тому належить лінії їх перетину — прямій a, тобто прямі a і b перетинаються, що суперечить умові. Отже, наше припущення неправильне і пряма b паралельна площині α. ○

Наприклад, у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кожне бічне ребро паралельне площинам бічних граней, які не проходять через це ребро (рис. 5.2). Дійсно, бічними гранями прямокутного паралелепіпеда є прямокутники. Тому, наприклад, бічне ребро AA_1 паралельне прямій DD_1 бічної грані DD_1CC_1, а значить, за ознакою паралельності прямої і площини, ребро AA_1 паралельне площині DD_1C_1C. Аналогічно ребро AA_1 паралельне площині BB_1C_1C.

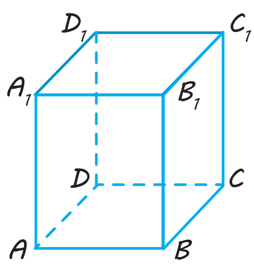


Рис. 5.2

Зауваження. Будемо казати, що ребро многогранника паралельне його грані, якщо воно лежить на прямій, паралельній площині цієї грані.

Наступна теорема є ще однією ознакою паралельності двох прямих у просторі.

Теорема 5.2 (ознака паралельності двох прямих у просторі). Якщо площина проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.

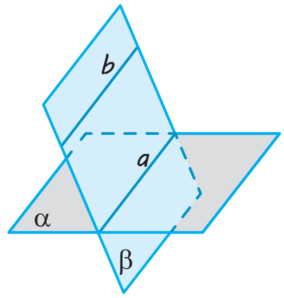


Рис. 5.3

Доведення. Нехай площина β проходить через пряму b, паралельну площині α, і пряма a є лінією перетину цих площин (рис. 5.3). Доведемо, що прямі a і b паралельні.

Дійсно, вони лежать в одній площині β. Крім цього, пряма a лежить у площині α, а пряма b не перетинається із цією площиною. Отже, пряма b не може перетинатися з прямою a. Таким чином, прямі a і b лежать в одній площині і не перетинаються. Тому вони паралельні. ○

Зазначимо, що з доведення теореми 5.2 випливає така властивість: **якщо пряма b паралельна площині α, то в площині завжди знайдеться пряма a, паралельна прямій b.**

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Чи є правильним твердження: «Пряма, паралельна площині, паралельна будь-якій прямій, що лежить у цій площині»?

Розв'язання	Коментар
Твердження неправильне, оскільки, наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.4) пряма DC паралельна площині AA_1B_1B, але не паралельна прямій AA_1, яка лежить у цій площині (прямі DC і AA_1 мимобіжні). ◁	Якщо якесь твердження не виконується, то, для того щоб його спростувати, достатньо навести хоча б один приклад, коли умова твердження виконується, а висновок — ні (так званий «контрприклад»). Для такого прикладу можна використати відомі геометричні фігури, зокрема, многогранники.

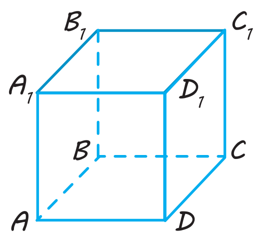


Рис. 5.4

Задача 2 Дано трикутник ABC. Площина, паралельна прямій AB, перетинає сторону AC цього трикутника в точці A_1, а сторону BC — у точці B_1. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо $AB = 10$ см, $AA_1 : A_1C = 2 : 3$.

Розв'язання	Коментар
Позначимо дану площину через α (рис. 5.5). Оскільки $AB \parallel \alpha$ і площина ABC перетинає α по A_1B_1, то $A_1B_1 \parallel AB$. Тоді $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$.	Для того щоб скласти план розв'язування, спочатку необхідно врахувати твердження теореми 5.2: *якщо площина проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.*

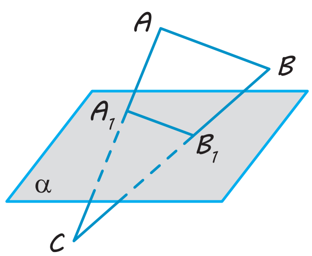


Рис. 5.5

Отже, $\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{A_1C}{AC}$, тобто $\dfrac{A_1B_1}{10}=\dfrac{3}{5}$.

Таким чином, $A_1B_1=6$ (см).

Відповідь: 6 см. ◁

Далі слід обґрунтувати, що пряма A_1B_1 паралельна прямій AB. Потім можна використати відомий із планіметрії опорний факт: *пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає трикутник, подібний даному*.

Задача 3

Дано дві мимобіжні прямі (рис. 7.6, *а*). Проведіть через одну з них площину, паралельну другій.

Розв’язання	Коментар
▶ Нехай дано дві мимобіжні прямі a і b. 1. Виберемо на прямій b довільну точку B (рис. 5.6, *б*) і проведемо через точку B пряму a', паралельну прямій a (це завжди можна зробити за теоремою 4.2).	Це задача на уявлювану побудову, і тому головним у ході її розв’язування є доведення існування фігури, що задовольняє дані умови (див. § 3). Доведення повинно спиратися на відповідні властивості стереометричних фігур. Зокрема, для того щоб визначити площину, паралельну даній прямій, достатньо використати ознаку паралельності прямої та площини і «забезпечити» наявність у побудованій площині прямої, паралельної даній.
2. Через прямі a' і b, які перетинаються, проведемо площину α. Це і є шукана площина. Дійсно, оскільки за побудовою $a \parallel a'$, де пряма a' лежить у площині α, то за ознакою паралельності прямої і площини $a \parallel \alpha$ (і площина α проведена через пряму b). ◁	Це дозволяє скласти *план побудови*: провести через довільну точку однієї з прямих пряму, паралельну другій, а потім через дві прямі, що перетинаються, провести площину. Слід також довести, що в результаті побудови дійсно отримали шукану фігуру.

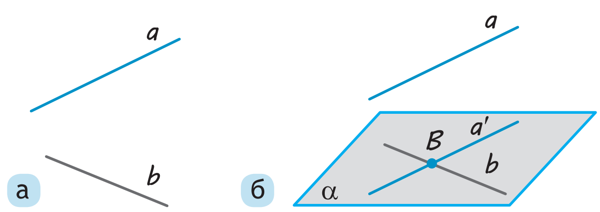


Рис. 5.6

Запитання для контролю

1. Назвіть усі випадки взаємного розміщення прямої і площини в просторі.
2. Дайте означення паралельних прямої і площини.
3. Сформулюйте ознаку паралельності прямої і площини.
4*. Доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
5. Сформулюйте властивість паралельних прямої і площини (ознаку паралельності прямих у просторі).
6*. Доведіть ознаку паралельності прямих у просторі.

Вправи

5.1.° У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажіть, обґрунтувавши відповідь, яким граням паралельне ребро:
1) AB; 2) A_1D_1; 3) CC_1.

5.2. Основа AB трапеції $ABCD$ лежить у площині α, яка не збігається з площиною трапеції. Як розташована решта сторін трапеції відносно площини α? Відповідь поясніть.

5.3. Дано паралелограм $ABCD$. Через сторону AD проведена площина α, яка не збігається з площиною паралелограма. Доведіть, що $BC \parallel \alpha$.

5.4. Чи є правильним твердження, що дві прямі, паралельні одній площині, паралельні одна одній?

5.5. Одна з двох паралельних прямих паралельна площині. Чи є правильним твердження, що й друга пряма паралельна цій площині?

5.6. Площина проходить через середини двох сторін трикутника і не збігається з площиною цього трикутника. Доведіть, що дана площина паралельна третій стороні трикутника.

5.7. Дано пряму, паралельну деякій площині. Доведіть, що в цій площині через будь-яку її точку можна провести пряму, паралельну даній прямій.

5.8. Доведіть, що через точку, яка не належить даній площині, можна провести пряму, паралельну цій площині. Скільки таких прямих можна провести?

5.9. Доведіть, що коли дві прямі паралельні, то через одну з них можна провести площину, паралельну другій прямій. Скільки існує таких площин?

5.10. Доведіть, що через кожну з двох мимобіжних прямих можна провести єдину площину, паралельну другій прямій.

5.11. Доведіть, що ребра однієї основи призми паралельні площині другої основи цієї призми.

5.12. Через дану точку проведіть пряму, паралельну кожній із двох даних площин, які перетинаються.

5.13. Дано трикутник BCD. Площина, паралельна прямій BC, перетинає сторону BD цього трикутника в точці B_1, а сторону CD — у точці C_1. Знайдіть довжину відрізка B_1C_1, якщо:
1) $BC = 20$ см, $BB_1 : BD = 2 : 5$;
2) $BC = 14$ см, $CC_1 : C_1D = 5 : 2$;
3) $B_1D = 6$ см, $BC : BD = 2 : 3$.

5.14. Доведіть, що переріз трикутної піраміди $ABCD$ площиною, паралельною двом мимобіжним ребрам AC і BD, завжди є паралелограмом (рис. 5.7).

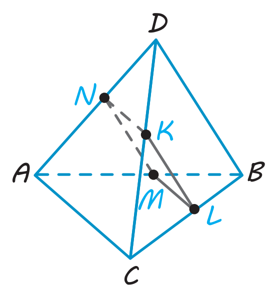


Рис. 5.7

5.15*. Доведіть, що пряма, паралельна кожній із двох площин, які перетинаються, паралельна і прямій їх перетину.

5.16*. Доведіть, що коли дві площини, які перетинаються по прямій a, перетинають площину α по паралельних прямих, то пряма a паралельна площині α.

5.17. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що пряма BD паралельна площині AB_1D_1.

5.18. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка O — центр грані $ABCD$. Доведіть, що пряма OC_1 паралельна площині AB_1D_1.

5.19. Площини α, β і γ попарно перетинаються, але не мають спільних для трьох площин точок. Чи існують у просторі прямі, паралельні всім трьом площинам?

5.20*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки P і Q — середини ребер AB і BC відповідно. Побудуйте переріз цього куба площиною, яка проходить через точки P і Q паралельно діагоналі BD_1 куба.

5.21*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка P — середина ребра AA_1. Побудуйте переріз цього куба площиною, яка проходить через точки P і D_1 паралельно діагоналі AC грані $ABCD$ куба.