ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Інтернет-підтримка

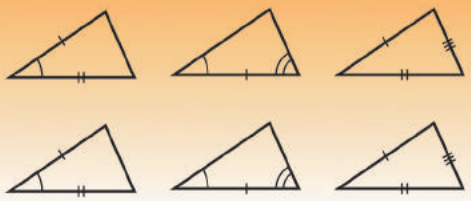
А. П. Єршова, В. В. Голобородько,
О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов

Геометрія 9

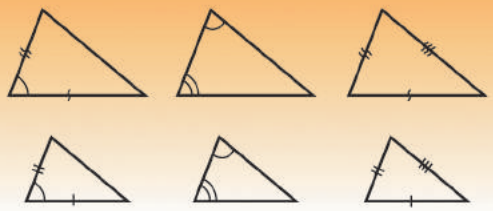
загальноосвітня
і допрофільна підготовка

ТРИКУТНИКИ

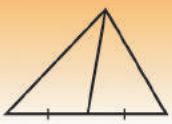
Ознаки рівності



Ознаки подібності



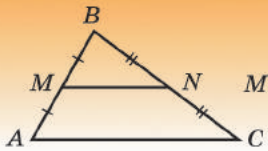
Медіана



Бісектриса

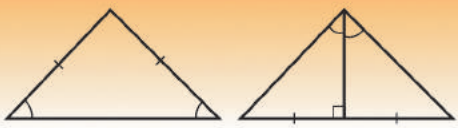
Висота

Середня лінія

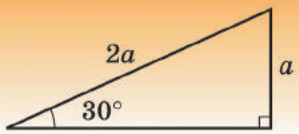


$MN = \frac{1}{2} AC$

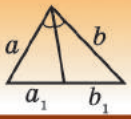
Рівнобедрений трикутник



Прямокутний трикутник з кутом 30°



Властивість бісектриси

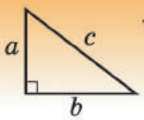


$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$

Сума кутів трикутника

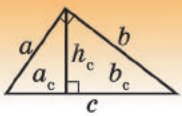
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ $\delta = \alpha + \beta$

Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику



Терема Піфагора

$c^2 = a^2 + b^2$



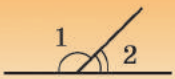
$a^2 = a_c \cdot c$

$b^2 = b_c \cdot c$

$h_c^2 = a_c \cdot b_c$ $h_c = \frac{a \cdot b}{c}$

ПРЯМІ І КУТИ

Суміжні кути

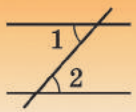


$\angle 1 + \angle 2 = 180°$

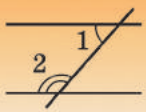
Вертикальні кути

$\angle 1 = \angle 2$

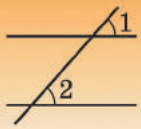
Паралельні прямі



$\angle 1 = \angle 2$



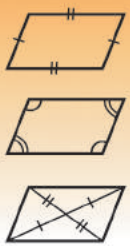
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$



$\angle 1 = \angle 2$

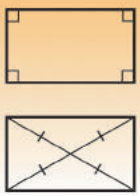
ЧОТИРИКУТНИКИ

Паралелограм і його властивості

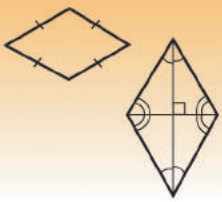


Види паралелограма і їхні властивості

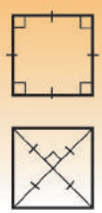
Прямокутник



Ромб

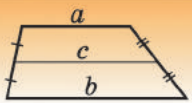


Квадрат



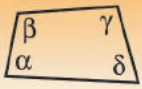
Трапеція

Середня лінія трапеції



$$c = \frac{a+b}{2}$$

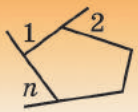
Сума кутів чотирикутника



$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Сума кутів многокутника

$\angle 1 + \angle 2 + \ldots + \angle n = 180°(n-2)$



$\angle 1 + \angle 2 + \ldots + \angle n = 360°$

А. П. Єршова, В. В. Голобородько,
О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов

Геометрія

**Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів**

Харків
Видавництво «Ранок»
2017

УДК [37.016:514.1](075.3)
ББК 22.151.0я721
Є 80

Рецензент:
Є. П. Нелін, професор кафедри математики Харківського національного педагогічного університету ім. Г. С. Сковороди, канд. пед. наук

Єршова А. П.
Є 80 Геометрія: підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. — Х. : Вид-во «Ранок», 2017.

УДК [37.016:514.1](075.3)
ББК 22.151.0я721

Інтернет-підтримка
Для користування електронними матеріалами до підручника увійдіть на сайт interactive.ranok.com.ua

Служба технічної підтримки:
тел. (057) 719-48-65, (098) 037-54-68
(понеділок–п'ятниця з 10:00 до 18:00)
E-mail: interactive@ranok.com.ua

Дорогі друзі!

У цьому навчальному році завершується вивчення планіметрії — геометрії на площині. Радимо ще перед початком занять пригадати основні поняття й теореми, що їх ви вивчали в 7–8 класах. Усі вони відомі з часів Давньої Греції і належать до елементарної (евклідової) геометрії. Але в дев'ятому класі ви познайомитеся з геометричними методами, які було винайдено значно пізніше, в XIV–XX ст.: координатним, векторним і методом геометричних перетворень. Вони набули широкого застосування в техніці й природничих науках, насамперед у фізиці, тому, вивчаючи їх, ви краще зрозумієте деякі фізичні закони. Узагалі геометрію 9 класу можна без перебільшення назвати *геометрією методів*.

За допомогою цього підручника ви навчитеся розв'язувати будь-які, а не тільки прямокутні, трикутники; поглибите свої знання у галузі логіки; дізнаєтесь про життя і здобутки відомих учених минулого. Майже в кожному параграфі вам запропоновано довести математичне твердження або навести приклад, провести аналогію, тобто самостійно рушити до нових знань.

Отже, скарби геометрії чекають на вдумливих і спостережливих шукачів, які зможуть не тільки віднайти, але й оцінити справжню красу й витонченість геометричних знань. Ми дуже сподіваємось, що такими винахідниками станете саме ви.

Бажаємо вам успіхів!

Як користуватися підручником

Підручник має п'ять розділів, кожний із яких складається з параграфів, а параграфи — з пунктів. У тексті міститься як теоретичний матеріал, так і приклади розв'язування задач. Найважливіші поняття і факти виділено **напівжирним шрифтом**.

Вправи і задачі, які подано в підручнику, поділяються на декілька груп. ***Усні вправи*** допоможуть вам зрозуміти, наскільки успішно ви засвоїли теоретичний матеріал. Ці вправи не обов'язково виконувати подумки — для їх розв'язування ви можете використати рисунки, провести необхідні міркування в чернетці. Після них можна переходити до ***графічних вправ***, які виконуються в зошиті або на комп'ютері. Далі йдуть ***письмові задачі***.

Спочатку перевірте свої знання, виконуючи завдання ***рівня А***. Більш складними є задачі ***рівня Б***. Якщо ви добре опанували матеріал і бажаєте виявити свої творчі здібності, на вас чекають задачі ***рівня В***. Значки і біля номерів вправ означають, що ці вправи на розсуд вчителя можуть бути використані відповідно для роботи в парах і групах. Після кожного параграфа у рубриці ***Повторення*** зазначено, які саме поняття й факти слід пригадати для успішного вивчення нового матеріалу (поруч у стрілках зазначено відповідні параграфи у підручниках для 7 і 8 класів*), та наведено задачі, які підготують вас до сприйняття наступної теми. Більшість задач підручника супроводжуються відповідями, які наведені після ***Додатків***. Розв'язувати всі задачі кожної рубрики не обов'язково. Зверніть увагу: параграфи, позначені знаком «*», містять навчальний матеріал, що не є обов'язковим для вивчення.

Для самостійної роботи вдома призначені задачі, номери яких позначено значком . Наприкінці кожного розділу подано контрольні запитання й типові задачі для контрольних робіт, завдяки яким ви зможете краще підготуватися до тематичного оцінювання. Пройшовши онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua, ви зможете самостійно перевірити рівень ваших знань. Додаткові задачі до розділів допоможуть вам узагальнити вивчене, а задачі підвищеної складності відкриють нові грані геометрії та красу нестандартного мислення. Розширити свої знання з кожного розділу ви можете, переглянувши відеоматеріали на тому самому сайті. Про можливість скористатися матеріалами сайту вам нагадуватиме значок . Зверніть увагу також на ***задачі для повторення курсу геометрії 7–9 класів***, подані після останнього розділу, — вони допоможуть вам краще підготуватися до підсумкової атестації.

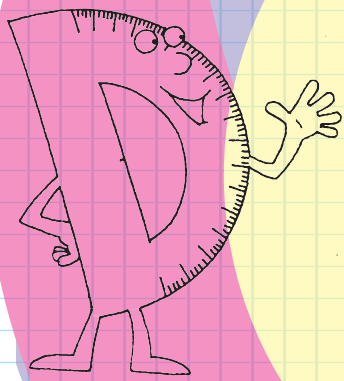
Підсумкові огляди наприкінці кожного розділу — своєрідний геометричний компас, за допомогою якого ви зможете орієнтуватися у вивченому матеріалі. ***Додатки***, наведені в кінці підручника, сприятимуть поглибленню відомостей з окремих тем, а ***історичні довідки*** до розділів і матеріали рубрики «Математичні олімпіади» познайомлять з деякими цікавими фактами про розвиток геометрії і математичних олімпіад, з діяльністю відомих українських та зарубіжних учених.

---

* Єршова, А. П. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. [Текст] / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський. — Х. : Вид-во «Ранок». — 2015. — 224 с. : іл.; Єршова, А. П. Геометрія : Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. [Текст] / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. — Х. : Вид-во «Ранок», 2016. — 256 с. : іл.

Розділ I

Розв'язування трикутників



Трикутник є першою фігурою, яка не може розкластися в простіші фігури... і тому є першим фундаментом будь-якої речі, яка має межу й форму.

Джордано Бруно, італійський учений

У восьмому класі ви навчилися розв'язувати прямокутні трикутники, тобто знаходити їхні невідомі елементи за відомими. Теоретичним підґрунтям для розв'язування прямокутних трикутників були теорема Піфагора й властивості ***тригонометричних функцій*** гострого кута прямокутного трикутника — синуса, косинуса, тангенса й котангенса. За допомогою теорем і співвідношень, які розглядатимуться в цьому розділі, можна розв'язати не тільки прямокутний, але й узагалі будь-який трикутник.

Застосування тригонометричних функцій дозволяє отримати нові формули для знаходження окремих елементів та площ многокутників і значно розширює можливості використання алгебри в процесі розв'язування геометричних задач.

§ 1 Тригонометричні функції кутів від 0° до 180°

1.1. Означення тригонометричних функцій на колі

Нагадаємо, що в прямокутному трикутнику з катетами a і b, гіпотенузою c та гострим кутом α (рис. 1) за раніше даним означенням

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

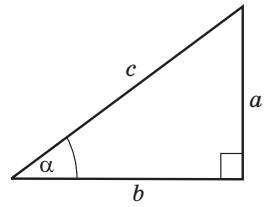
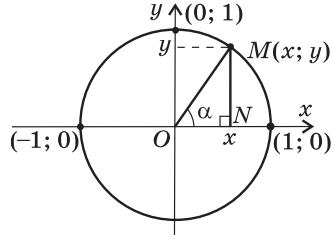


Рис. 1. До означення тригонометричних функцій гострого кута прямокутного трикутника

Дамо означення тригонометричних функцій для будь-якого кута від 0° до 180°. Для цього в прямокутній системі координат, з якою ви добре знайомі, побудуємо коло радіуса 1 з центром у початку координат (рис. 2). Таке коло називають ***тригонометричним***. Від додатної півосі осі Ox відкладемо у напрямі проти ходу годинникової стрілки гострий кут α. Нехай $M(x;\ y)$ — точка, у якій сторона цього кута перетинає дане коло (рис. 2, *а*). Проведемо перпендикуляр MN до осі Ox. Утворився прямокутний трикутник OMN з гострим кутом α, гіпотенузою $OM = 1$ і катетами, довжини яких дорівнюють координатам точки M: $ON = x$, $MN = y$. Із трикутника OMN маємо:

$$\sin\alpha = \frac{MN}{OM} = \frac{y}{1} = y,\ \cos\alpha = \frac{ON}{OM} = \frac{x}{1} = x,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MN}{ON} = \frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{ON}{MN} = \frac{x}{y}.$$



а

Рис. 2. До означення тригонометричних функцій кутів від 0° до 180° [Див. також с. 8]

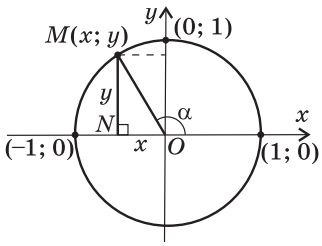
Отже, в тригонометричному колі синус і косинус гострого кута дорівнюють відповідно ординаті й абсцисі точки, у якій сторона даного кута перетинає коло, а тангенс і котангенс цього кута дорівнюють відношенням ординати до абсциси й абсциси до ординати відповідно:

$$\sin\alpha = y,\ \cos\alpha = x,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

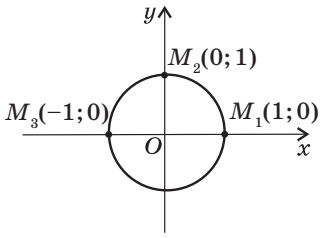
Зазначимо, що значення тригонометричних функцій залежать лише від градусної міри кута. Використаємо отримані рівності для означення тригонометричних функцій будь-якого кута від 0° до 180°.

Означення

Для будь-якого кута α з проміжку 0° J α J 180° $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ ($\alpha \neq 90°$), $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ ($\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 180°$), де x, y — координати відповідної точки M тригонометричного кола (рис. 2).



б



в

Рис. 2. [Закінчення]

Отже, якщо кут α тупий ($90° < \alpha < 180°$, рис. 2, *б*), то ордината точки M додатна (тобто $\sin\alpha > 0$), а абсциса від'ємна (тобто $\cos\alpha < 0$). Очевидно, що відношення координат у цьому випадку також від'ємні, тобто $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$. Узагалі, ***косинуси, тангенси й котангенси тупих кутів є від'ємними числами.*** І навпаки, ***якщо косинус, тангенс або котангенс кута*** α **($\alpha < 180°$) *від'ємні, то кут*** α ***тупий.***

Визначимо значення тригонометричних функцій кутів 0°, 90°, 180° (рис. 2, *в*). Якщо $\alpha = 0°$, то точка M_1 має координати (1; 0). Звідси $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{ctg} 0°$ не існує.

Якщо $\alpha = 90°$, то точка M_2 має координати (0; 1). Звідси $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{ctg} 90° = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{tg} 90°$ не існує.

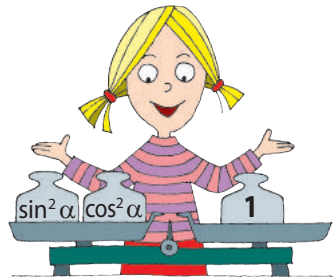
І, нарешті, якщо $\alpha = 180°$, то точка M_3 має координати (–1; 0). Звідси $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{ctg} 180°$ не існує.

Зауважимо також, що абсциси точок M для кутів від 0° до 180° змінюються в межах від –1 до 1, тобто –1 J $\cos\alpha$ J 1, а ординати — в межах від 0 до 1, тобто 0 J $\sin\alpha$ J 1.

1.2. *Тригонометричні тотожності*

Нагадаємо, що для будь-якого гострого кута α прямокутного трикутника було доведено основну тригонометричну тотожність $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Покажемо, що це співвідношення справджується для будь-якого кута від 0° до 180°.

Справді, якщо кут α тупий (див. рис. 2, *б*), то з прямокутного трикутника OMN ($\angle N = 90°$, $ON = |x|$, $MN = y$, $OM = 1$) за теоремою Піфагора маємо $MN^2 + ON^2 = OM^2$, тобто $x^2 + y^2 = 1$, і, з урахуванням означень синуса й косинуса, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. У випадку, коли кут α дорівнює 0°, 90° або 180°, цю тотожність легко перевірити безпосередньою підстановкою значень синуса й косинуса відповідного кута (зробіть це самостійно).



Отже, **для будь-якого кута α з проміжку 0° J α J 180°**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

З основної тригонометричної тотожності з урахуванням знаків тригонометричних функцій для кутів від 0° до 180° випливає, що

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Знак $\cos\alpha$ обирають залежно від того, чи є кут α гострим (знак «+») або тупим (знак «–»).

Безпосередньо з означень тригонометричних функцій випливають такі тотожності:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ (\alpha \neq 90°), \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ (0° < \alpha < 180°),$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \ (\alpha \neq 0°, \ \alpha \neq 90°, \ \alpha \neq 180°).$$

У восьмому класі для гострого кута α було доведено формули доповнення, які виражають функції кута $(90° - \alpha)$ через функції кута α:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Доведемо формули, що дозволяють звести розгляд тригонометричних функцій кутів $(180° - \alpha)$ до розгляду функцій кута α.

Теорема (формули зведення для кутів 180° – α)

Для будь-якого кута α з проміжку 0° J α J 180°
sin(180° – α) = sin α, cos(180° – α) = – cos α.

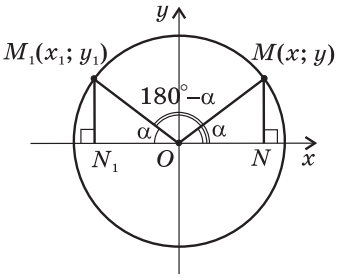


Рис. 3. До доведення формул зведення для кутів від 0° до 180°

Доведення

□ Нехай від додатної півосі осі Ox відкладено кути α і 180° – α, причому сторони цих кутів перетинають тригонометричне коло в точках M і M_1 відповідно (рис. 3). Розглянемо випадок, коли кут α гострий (для тупих кутів доведення аналогічне). Проведемо з точок M і M_1 перпендикуляри MN і M_1N_1 до осі Ox. Оскільки кут N_1OM_1 доповнює кут 180° – α до розгорнутого, то $\angle N_1OM_1 = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$, а прямокутні трикутники OMN і OM_1N_1 рівні за гіпотенузою і гострим кутом. Із рівності катетів MN і M_1N_1 випливає, що точки M і M_1 мають однакові ординати, тобто

$$\sin(180° - \alpha) = y_1 = y = \sin\alpha.$$

Крім того, з рівності катетів ON і ON_1 випливає, що абсциси точок M і M_1 протилежні, тобто

$$\cos(180° - \alpha) = x_1 = -x = -\cos\alpha.$$

Для випадків, коли кут α дорівнює 0°, 90° і 180°, перевірте правильність формул зведення самостійно. ■

Наслідок

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \ (0° \text{ J } \alpha \text{ J } 180°,\ \alpha \neq 90°),$$
$$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \ (0° < \alpha < 180°).$$

Задача

Обчисліть значення тригонометричних функцій кута 150°.

Розв'язання

$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 150° = \operatorname{tg}(180° - 30°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 150° = \operatorname{ctg}(180° - 30°) = -\operatorname{ctg} 30° = -\sqrt{3}$.

Відповідь: $\sin 150° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 150° = -\sqrt{3}$.

Наведемо значення тригонометричних функцій деяких кутів у вигляді таблиці.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

Запитання і задачі

Усні вправи

1. Сторона кута α, відкладеного від додатної півосі осі Ox у напрямі проти годинникової стрілки, перетинає тригонометричне коло в точці M.

а) Назвіть координати точки M, якщо $\alpha = 90°$.

б) Визначте величину кута α, якщо $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Визначте, чи є кут α ($0° < \alpha < 180°$) гострим, прямим або тупим, якщо:

а) $\cos\alpha = 0$;

б) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha < 0$;

в) $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$.

3. Чи може косинус тупого кута дорівнювати 0,01; –0,8; –3? Чи може косинус тупого кута дорівнювати синусу того самого кута?

4. Дано гострий кут β, причому $\sin\beta = n$, $\cos\beta = m$. Знайдіть синус і косинус кута ($180° - \beta$).

5. Чи є правильним твердження:

а) синуси суміжних кутів є протилежними числами;

б) тангенси суміжних кутів є протилежними числами?

Графічні вправи

6. У прямокутній системі координат на тригонометричному колі позначте точку M, яка відповідає куту 120°.

а) Проведіть із точки M перпендикуляри до осей координат. Визначте координати основ цих перпендикулярів.

б) Позначте на тригонометричному колі точку M_1, що відповідає гострому куту, синус якого дорівнює синусу 120°. Виміряйте цей гострий кут і обґрунтуйте отриманий результат.

7. У прямокутній системі координат на тригонометричному колі позначте точку M, яка відповідає куту 150°.

а) Визначте координати x і y точки M. Яка з координат більша?

б) Обчисліть значення виразу $x^2 + y^2$. Обґрунтуйте отриманий результат.

Письмові вправи

Рівень А

8. За допомогою формул зведення для кутів $(180° - \alpha)$ обчисліть синус, косинус і тангенс кутів 120° і 135°.

9. За допомогою формул зведення і тригонометричних таблиць (калькулятора) обчисліть:

а) $\sin 160°$; б) $\cos 115°$; в) $\operatorname{tg} 95°$.

10. Визначте всі значення α від 0° до 180°, для яких справджується рівність:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\alpha = -0{,}5$; в) $\operatorname{tg}\alpha = -1$.

11. За допомогою формул зведення і таблиць значень тригонометричних функцій (див. Додаток 4) знайдіть:

а) $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\alpha = 170°$;

б) гострий і тупий кути, синуси яких дорівнюють 0,643.

12. Знайдіть:

а) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}8$;

б) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $90° < \alpha < 180°$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = -1$.

13. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}6$ і кут α тупий.

14. Порівняйте:

а) $\cos 65°$ і $\cos 115°$; б) $\operatorname{tg} 48°$ і $\operatorname{tg} 148°$; в) $\sin 35°$ і $\sin 145°$.

15. Доведіть тотожність:

а) $\sin(180° - \alpha) = \cos(90° - \alpha)$; в) $-\operatorname{tg}(180° - \alpha) \cdot \cos\alpha = \sin\alpha$;

б) $\dfrac{\sin(90° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = -1$; г) $\cos^2\alpha + \sin\alpha \sin(180° - \alpha) = 1$.

16. Доведіть тотожність:

а) $\dfrac{-\sin\alpha}{\cos(180° - \alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$; в) $\dfrac{\sin(180° - \alpha)}{\sin\alpha} = 1$.

б) $1 - \cos^2\alpha = \sin\alpha \sin(180° - \alpha)$;

Рівень Б

17. Знайдіть тангенс і котангенс кута α, якщо:

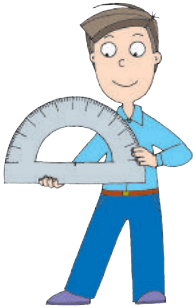
а) $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$; в) $\sin\alpha = -\cos\alpha$.

б) $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$, $90° < \alpha < 180°$;

18. Знайдіть:

а) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}28$;

б) $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ і кут α тупий.



19 (опорна). Доведіть, що:

а) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ **(0° J α J 180°, α ≠ 90°);**

б) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ **(0° < α < 180°).**

20. Спростіть вираз:

а) $1 - \sin(180° - \alpha)\cos(180° - \alpha)\operatorname{tg}(180° - \alpha)$; в) $1 - \operatorname{tg}(180° - \alpha)\operatorname{tg}\alpha$.

б) $\dfrac{\cos(90° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;

21. Спростіть вираз:

а) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha + \cos\alpha \cos(180° - \alpha)$; в) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 2\operatorname{tg}(180° - \alpha)\cos^2\alpha$.

б) $\dfrac{\cos(90° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$;

22. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

23. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = -2{,}4$.

24. Доведіть, що синуси будь-яких двох кутів паралелограма рівні.

25. Доведіть, що сума косинусів усіх кутів трапеції дорівнює нулю.

26. Побудуйте кут α, якщо:

а) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ і кут α гострий; б) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

27. Побудуйте кут α, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$.

Рівень В

28. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = -2{,}5$. Скільки розв'язків має задача?

29. Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0{,}5$. Скільки розв'язків має задача?

30. Розташуйте кути 50°, 120°, 170° у порядку зростання значень їхніх тригонометричних функцій:

а) косинусів; б) синусів; в) тангенсів.

31. Відомо, що α і β — тупі кути, причому $\cos\alpha > \cos\beta$. Порівняйте:

а) $\sin\alpha$ і $\sin\beta$; б) $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\beta$.

Повторення перед вивченням § 2

Теоретичний матеріал

- розв'язування прямокутних трикутників; 8 клас, § 19–21
- теорема Піфагора. 8 клас, § 13

Задачі

32. У прямокутному трикутнику з гострим кутом 30° гіпотенуза дорівнює 6 см. Знайдіть катети трикутника.

33. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону ромба на відрізки завдовжки 8 см і 9 см. Знайдіть площу ромба. Скільки розв'язків має задача?

§ 2 Теорема косинусів та наслідки з неї

2.1. Теорема косинусів

Під час розв'язування задач часто виникає необхідність обчислити невідому сторону трикутника за двома відомими сторонами й кутом між ними. Теорема Піфагора дозволяє зробити це у випадку, коли даний кут прямий. Наступна теорема є узагальненням теореми Піфагора і дозволяє знаходити невідому сторону в довільному трикутнику.

Теорема (косинусів)

Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

де a, b, c — сторони трикутника, кут C — кут між сторонами a і b.

Доведення

□ Нехай у трикутнику ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Розглянемо одночасно два випадки, коли кути A і C обидва гострі (рис. 4, *а*) та коли кут A тупий, а кут C гострий (рис. 4, *б*). Проведемо висоту BD. Із прямокутного трикутника BDC маємо:

$BD = a\sin C$, $CD = a\cos C$.

Тоді $AD = |b - a\cos C|$. Із прямокутного трикутника ABD за теоремою Піфагора:

$AB^2 = BD^2 + AD^2$, $\quad c^2 = (a\sin C)^2 + (b - a\cos C)^2$,

$c^2 = a^2\sin^2 C + b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C$,

$c^2 = a^2(\sin^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab\cos C$,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

У випадку, коли кут C прямий, маємо $\cos C = \cos 90° = 0$. Тоді твердження теореми набуває вигляду $c^2 = a^2 + b^2$, тобто збігається з твердженням вже доведеної теореми Піфагора.

Доведення для випадку, коли кут C тупий (рис. 4, *в*), проведіть самостійно. ■

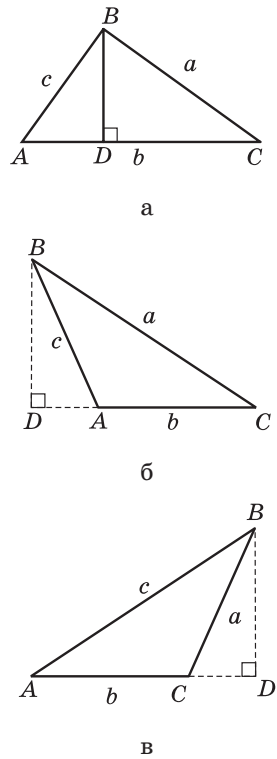


Рис. 4. До доведення теореми косинусів

Задача

Знайдіть сторони паралелограма, якщо його діагоналі завдовжки 10 см і 16 см перетинаються під кутом 60°.

Розв'язання

Нехай діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O, $AC = 16$ см, $BD = 10$ см, $\angle AOB = 60°$ (рис. 5). Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то $AO = OC = 8$ см, $BO = OD = 5$ см. За теоремою косинусів із трикутника AOB маємо:

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos\angle AOB$,

$AB^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos 60°$.

Оскільки $\cos 60° = \frac{1}{2}$, то $AB^2 = 49$, $AB = 7$ (см).

Оскільки $\angle AOD = 120°$ як суміжний з кутом AOB, то з трикутника AOD за теоремою косинусів маємо:

$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot OD \cos\angle AOD$,

$AD^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos 120°$.

Оскільки $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$, то $AD^2 = 129$, $AD = \sqrt{129}$ (см).

Відповідь: 7 см і $\sqrt{129}$ см.

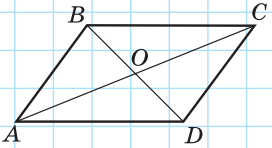


Рис. 5

2.2. Наслідки з теореми косинусів

Завдяки своїм наслідкам теорема косинусів дає можливість не тільки знаходити невідому сторону трикутника, але й визначати кути трикутника за відомими сторонами (див. рис. 4).

Наслідок 1

У трикутнику ABC $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Наслідок 2

Якщо в трикутнику зі сторонами a, b, c справджується нерівність $a^2 + b^2 > c^2$, то кут, протилежний стороні c, гострий; якщо $a^2 + b^2 < c^2$, то кут, протилежний стороні c, тупий.

Дійсно, якщо у формулі, наведеній у наслідку 1, $a^2+b^2>c^2$, то $\cos C>0$, отже, кут C гострий, якщо $a^2+b^2<c^2$, то $\cos C<0$, отже, кут C тупий.

Нагадаємо, що у випадку, коли $a^2+b^2=c^2$, за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, кут, протилежний стороні c, прямий.

Таким чином, за допомогою теореми косинусів можна однозначно встановити, чи є трикутник із заданими сторонами гострокутним, прямокутним або тупокутним.

Наслідком із теореми косинусів можна вважати також таку властивість паралелограма.

Опорна задача
(про співвідношення діагоналей і сторін паралелограма)

Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін: $d_1^2+d_2^2=2\left(a^2+b^2\right)$, де d_1 і d_2 — діагоналі паралелограма, a і b — сусідні сторони паралелограма.

Доведіть.

Розв'язання

Нехай у паралелограмі $ABCD$ $AB=CD=a$, $AD=BC=b$, $BD=d_1$, $AC=d_2$, $\angle BAD=\gamma$ (рис. 6). Оскільки сума сусідніх кутів паралелограма дорівнює $180°$, то $\angle ABC=180°-\gamma$. Виразимо квадрати діагоналей паралелограма за допомогою теореми косинусів.

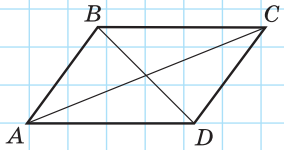


Рис. 6

Із трикутника ABD маємо:

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\gamma$, $d_1^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

Із трикутника ABC маємо:

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos(180°-\gamma)$,

або, враховуючи, що $\cos(180°-\gamma)=-\cos\gamma$,

$d_2^2=a^2+b^2+2ab\cos\gamma$.

Додаючи праві й ліві частини отриманих рівностей, одержимо: $d_1^2+d_2^2=2\left(a^2+b^2\right)$, що й треба було довести.

Запитання і задачі

Усні вправи

34. У трикутнику зі сторонами a, b, c визначте, чи є кут, протилежний стороні a, гострим, прямим або тупим, якщо:

а) $a^2 > b^2 + c^2$; б) $a^2 < b^2 + c^2$; в) $a^2 = b^2 + c^2$.

35. Чи можуть два кути трикутника мати від'ємні косинуси?

36. Назвіть найбільший кут трикутника ABC, якщо $AB^2 > BC^2 + AC^2$.

Графічні вправи

37. Накресліть трикутник зі сторонами 3 см і 5 см та кутом між ними 120°. За теоремою косинусів обчисліть довжину найбільшої сторони трикутника. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

38. Накресліть різносторонній трикутник і виміряйте його сторони.

а) Обчисліть значення виразу $a^2 + b^2 - c^2$, де a, b, c — довжини сторін трикутника, причому $a < b < c$.

б) За результатом обчислення визначте, чи є найбільший кут трикутника гострим, прямим або тупим. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

Письмові вправи

Рівень А

39. Знайдіть невідому сторону трикутника, якщо дві його сторони і кут між ними дорівнюють відповідно:

а) $3\sqrt{3}$ см, 11 см і 30°;

б) 8 см, 15 см і 60°;

в) 5 см, 16 см і 120°.

40. Знайдіть периметр трикутника, якщо його сторони завдовжки 7 см і 15 см утворюють кут 60°.

41. Сторони трикутника дорівнюють $3\sqrt{2}$, 1 і 5. Визначте градусну міру найбільшого кута трикутника.

42. Доведіть, що рівнобедрений трикутник з основою 7 см і бічною стороною 4 см є тупокутним.

43. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 і 8. Яке найменше ціле значення повинна мати довжина третьої сторони, щоб кут між двома даними сторонами був тупим?

44. Дві сторони трикутника дорівнюють $4\sqrt{2}$ см і 1 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

45. У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $BC = 5$ см, а косинус зовнішнього кута при вершині B дорівнює $-0{,}2$. Знайдіть сторону AC.

Рівень Б

46. У паралелограмі знайдіть довжини:

а) сторін, якщо діагоналі завдовжки $6\sqrt{2}$ см і 14 см перетинаються під кутом 45°;

б) діагоналей, якщо сторони дорівнюють 10 см і 16 см, а один із кутів паралелограма вдвічі більший за інший.

47. Знайдіть діагоналі ромба з периметром $4a$ і гострим кутом α. Розв'яжіть задачу двома способами.

48. Діагональ паралелограма дорівнює 6 см і утворює зі стороною завдовжки 8 см кут 60°. Знайдіть невідому сторону й невідому діагональ паралелограма.

49. Не обчислюючи кутів трикутника, визначте його вид (за величиною кутів), якщо сторони трикутника дорівнюють:

а) 2, 3 і 4; б) 7, 24 і 25; в) 6, 10 і 11.

50. Сторони трикутника дорівнюють 5 м, 6 м і 7 м. Знайдіть косинуси кутів трикутника і визначте його вид (за величиною кутів).

51. У паралелограмі знайдіть:

а) периметр, якщо діагоналі дорівнюють 11 см і 17 см, а одна зі сторін — 13 см;

б) діагоналі, якщо їхні довжини відносяться як 4 : 7, а сторони дорівнюють 7 см і 9 см.

52. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 34 см, а діагоналі 11 см і 13 см.

Рівень В

53. У трикутнику ABC $\angle A = 90°$, $AC = 4$ см, $BC = 8$ см. На катеті AC зовні даного трикутника побудовано рівносторонній трикутник ACD. Знайдіть довжину відрізка BD.

54. У паралелограмі $ABCD$ $\angle A = 60°$, $AB = 2$, $BC = 4$. Точки M і N — середини сторін BC і CD відповідно. Знайдіть косинус кута MAN.

55. Сторони трикутника завдовжки 10 см і 42 см утворюють кут 120°. Знайдіть довжину медіани, проведеної з вершини даного кута.

56 (опорна). **У трикутнику зі сторонами a, b, c медіана, проведена до сторони c, обчислюється за формулою $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$.** Доведіть.

57. Якщо для медіан трикутника m_a, m_b і m_c справджується рівність $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$, то цей трикутник є прямокутним із гіпотенузою c. Доведіть. Чи справджується обернене твердження?

58. У трапеції $ABCD$ $AD \parallel CB$, $AD = 8$ см, $CD = 4\sqrt{3}$ см. Коло, яке проходить через точки A, B і C, перетинає відрізок AD в точці K, причому $\angle AKB = 60°$. Знайдіть BK.

Повторення перед вивченням § 3

Теоретичний матеріал

- пропорції; — 6 клас
- розв'язування прямокутних трикутників; — 8 клас, § 19–21
- коло, описане навколо трикутника. — 7 клас, п. 23.1

Задачі

59. У трикутнику ABC $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$, $BD = 4$ см — висота трикутника. Знайдіть довжини сторін AB і BC.

60. На колі позначено точки A, B, C і D так, що кут ABC утричі менший, ніж кут ADC. Знайдіть градусні міри цих кутів.

§ 3 Теорема синусів та наслідки з неї

3.1. Теорема синусів

Розглянемо ще одну теорему, за допомогою якої можна знаходити невідомі сторони й кути трикутника.

Теорема (синусів)

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

де a, b, c — сторони трикутника, протилежні кутам A, B, C відповідно.

Доведення

□ Нехай у трикутнику ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Проведемо висоту CD.

Якщо кут A гострий (рис. 7, *а*), то з прямокутного трикутника ACD маємо $CD = b\sin A$; якщо кут A тупий (рис. 7, *б*), то $CD = b\sin(180° - A) = b\sin A$. Аналогічно з трикутника BCD маємо $CD = a\sin B$. Прирівняємо отримані вирази:

$$b\sin A = a\sin B, \text{ або } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Аналогічно доводиться рівність $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

У випадку, коли кут A прямий, твердження теореми випливає з означення синусів кутів трикутника ABC (обґрунтуйте це самостійно). ■

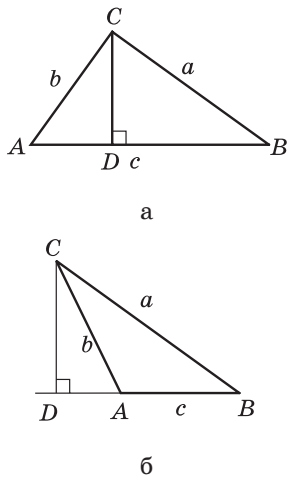


Рис. 7. До доведення теореми синусів

Задача

Діагональ паралелограма дорівнює d і утворює зі сторонами паралелограма кути α і β. Знайдіть сторони паралелограма.

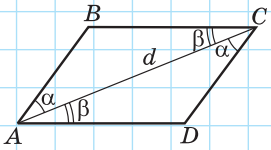


Рис. 8

Розв'язання

Нехай у паралелограмі $ABCD$ $AC = d$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAD = \beta$ (рис. 8). Знайдемо сторони паралелограма. Кути CAD і ACB — внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC, тому $\angle ACB = \beta$.

Тоді в трикутнику ABC $\angle B = 180° - (\alpha + \beta)$. Застосувавши теорему синусів для цього трикутника, одержимо:

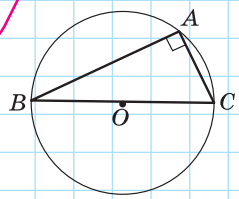
$$\frac{AC}{\sin(180° - (\alpha + \beta))} = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha}, \text{ або}$$

$$\frac{d}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha}.$$

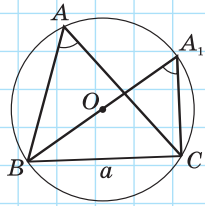
Звідси $AB = \dfrac{d\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, $BC = \dfrac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Відповідь: $\dfrac{d\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, $\dfrac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$.

3.2. Зв'язок між пропорційними відношеннями теореми синусів і діаметром описаного кола



а



б

Рис. 9. [Див. також с. 23]

Опорна задача

(повне формулювання теореми синусів)

Відношення сторони трикутника до синуса протилежного кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо трикутника:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

де a, b, c — сторони трикутника, протилежні кутам A, B, C відповідно, R — радіус описаного кола. Доведіть.

Розв'язання

Нехай навколо трикутника ABC ($BC = a$) описано коло радіуса R. Враховуючи пропорційні співвідношення теореми синусів, достатньо довести, що $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$, або $a = 2R\sin A$.

1) Нехай $\angle A = 90°$ (рис. 9, *а*). Тоді вписаний кут A спирається на півколо, тобто $a = BC = 2R = 2R \cdot 1 = 2R\sin 90° = 2R\sin A$.

2) Нехай $\angle A < 90°$ (рис. 9, *б*). Проведемо діаметр BA_1 і розглянемо трикутник A_1BC.

У цьому трикутнику $\angle BCA_1 = 90°$ як кут, що спирається на півколо, тобто $BC = BA_1 \sin A_1$. Оскільки вписані кути A і A_1 спираються на ту саму дугу, то $\angle A = \angle A_1$. Тоді $BC = BA_1 \sin A = 2R\sin A$, або $a = 2R\sin A$.

3) Нехай $\angle A > 90°$ (рис. 9, *в*). Проведемо діаметр BA_1. Тоді $\angle A + \angle A_1 = 180°$, звідки $\sin A_1 = \sin(180° - A) = \sin A$. Отже, $BC = BA_1 \sin A$, або $a = 2R\sin A$, що й треба було довести.

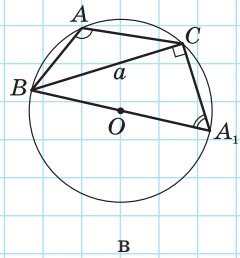


Рис. 9. [Закінчення]

Задача

Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з основами 1 і 3 та бічною стороною 2.

Розв'язання

Нехай у трапеції $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AD = 3$, $BC = 1$, $AB = CD = 2$ (рис. 10). Проведемо з вершин тупих кутів трапеції висоти BB_1 і CC_1. Тоді $AB_1 = B_1C_1 = C_1D = 1$ (доведіть це самостійно).

З прямокутного трикутника ABB_1 $\cos A = \frac{AB_1}{AB}$, $\cos A = \frac{1}{2}$, звідки $\angle A = 60°$, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Із трикутника ABD за теоремою косинусів маємо:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos A$,

$BD^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$, $BD^2 = 7$, $BD = \sqrt{7}$.

Коло, описане навколо трапеції, є також описаним навколо трикутника ABD. За щойно доведеним $\frac{BD}{\sin A} = 2R$, отже, $R = \frac{BD}{2\sin A}$, $R = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

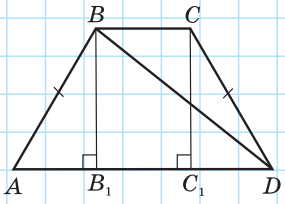


Рис. 10

Запитання і задачі

Усні вправи

61. За допомогою теореми синусів відновіть відношення синусів кутів трикутника ABC у правій частині рівності $BC : AC : AB = \ldots$.

62. Назвіть найбільшу та найменшу сторони трикутника ABC, якщо $\sin B > \sin A > \sin C$.

63. У трикутнику ABC $\sin A = \sin C$. Чи може один із кутів A і C бути тупим? Чи має даний трикутник рівні сторони?

64. У трикутнику ABC $AB = 6$, $BC = 3$. Чи може бути, що $\sin A = 1$?

Графічні вправи

65. Накресліть рівнобедрений трикутник із кутом при основі 30°. Виміряйте довжини сторін трикутника та обчисліть їх відношення до синусів протилежних кутів. Порівняйте отримані результати.

66. Накресліть коло радіуса 2 см і впишіть у нього трикутник із кутом 30°. Виміряйте сторону, протилежну до цього кута, і порівняйте її довжину з радіусом кола. Поясніть отриманий результат.

Письмові вправи

Рівень А

67. У трикутнику ABC знайдіть відношення сторін $AB : AC$ і $BC : AC$, якщо $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$.

68. У трикутнику ABC знайдіть:

а) сторону BC, якщо $AB = 2\sqrt{2}$ см, $\angle B = 105°$, $\angle C = 30°$;

б) кут A, якщо $AB = 4\sqrt{2}$ см, $BC = 4$ см, $\angle C = 45°$.

69. У трикутнику ABC знайдіть:

а) сторону AC, якщо $AB = 6\sqrt{2}$ см, $\angle B = 30°$, $\angle C = 45°$;

б) кут B, якщо $AB = \sqrt{3}$ см, $AC = \sqrt{2}$ см, $\angle C = 60°$.

70. У трикутнику MNK сторона MN удвічі менша, ніж NK, $\sin K = \frac{1}{4}$. Знайдіть кут M. Скільки розв'язків має задача?

71. У трикутнику MNK $\sin N : \sin K = 1 : 3$. Знайдіть сторону MN, якщо $MK = 3$ м.

72. За допомогою теореми синусів знайдіть відношення основи рівнобедреного прямокутного трикутника до бічної сторони.

73. За допомогою теореми синусів доведіть, що в прямокутному трикутнику катет, протилежний куту 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Рівень Б

74. У прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AC знайдіть бісектрису BD, якщо $\angle C = 30°$, $CD = 8\sqrt{2}$ см.

75. Знайдіть сторони трикутника ABC, якщо $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$, а висота AD дорівнює 6 м.

76. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 75°$, CD — бісектриса. Знайдіть AD, якщо $AC = 2\sqrt{3}$.

77. Одна зі сторін трикутника дорівнює a, а кути, прилеглі до цієї сторони, дорівнюють α і β. Знайдіть довжини бісектрис цих кутів.

78. Діагональ паралелограма утворює з його сторонами кути α і β. Знайдіть цю діагональ, якщо сторона, прилегла до кута α, дорівнює a.

79. Радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з кутом 120°, дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторони трикутника.

80. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 4 см. Знайдіть кути трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 4 см і $4\sqrt{3}$ см. Скільки розв'язків має задача?

Рівень В

81. Знайдіть довжини двох сторін трикутника, які лежать проти кутів 60° і 45°, якщо різниця цих довжин складає m.

82. Знайдіть сторони трикутника, периметр якого дорівнює P, а два кути α і β.

83. Доведіть, що коло, описане навколо трикутника, і коло, яке проходить через ортоцентр і дві вершини цього трикутника, мають рівні радіуси.

84. Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а висота 8 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

Повторення перед вивченням § 4

Теоретичний матеріал

- розв'язування прямокутних трикутників; 8 клас, § 19–21
- означення тригонометричних функцій. 9 клас, п. 1.1

Задачі

85. Знайдіть кути ромба, діагоналі якого дорівнюють 4 і $4\sqrt{3}$.

86. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, CD — висота. Порівняйте відрізки AD і DB, якщо $\sin A < \sin B$.

§ 4 Розв'язування трикутників

4.1. Основні задачі на розв'язування трикутників

За допомогою теорем косинусів і синусів можна розв'язати довільний трикутник за трьома основними елементами, якщо хоча б один із них є стороною трикутника. Розглянемо чотири основні задачі на розв'язування трикутників.

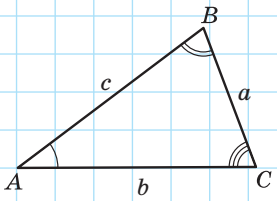


Рис. 11. До задач на розв'язування трикутників

Задача 1 (розв'язування трикутника за стороною та двома кутами)

Дано: a, $\angle B$, $\angle C$ (рис. 11). Знайти: b, c, $\angle A$.

Розв'язання

1) За теоремою про суму кутів трикутника $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$.

2) За теоремою синусів $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

звідки $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.

Задача 2 (розв'язування трикутника за двома сторонами й кутом між ними)

Дано: a, b, $\angle C$. Знайти: c, $\angle A$, $\angle B$.

Розв'язання

1) За теоремою косинусів $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$.

2) За наслідком з теореми косинусів $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

За допомогою калькулятора або таблиць знаходимо кут A.

3) За теоремою про суму кутів трикутника $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$.

Задача 3 (розв'язування трикутника за трьома сторонами)

Дано: a, b, c. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Розв'язання

1) За наслідком з теореми косинусів $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

За допомогою калькулятора або таблиць знаходимо кут A.

2) Аналогічно $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

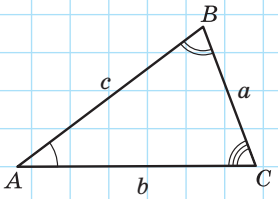
За допомогою калькулятора або таблиць знаходимо кут B.

3) За теоремою про суму кутів трикутника $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.

Зауважимо, що для знаходження кутів у задачах 2 і 3 можна скористатися також теоремою синусів. Але при цьому слід пам'ятати, що будь-якому значенню $\sin A$, меншому від одиниці, відповідатимуть два кути — гострий і тупий. Щоб уникнути помилки, рекомендуємо позначити через a найменшу зі сторін. У такому випадку кут A, протилежний стороні a, обов'язково має бути гострим. Обґрунтуйте це самостійно.

Задача 4 (розв'язування трикутника за двома сторонами й кутом, протилежним одній із них)

Дано: a, b, $\angle A$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$.



[Рис. 11]

Розв'язання

1) За теоремою синусів $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, звідки $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$.

За допомогою калькулятора або таблиць знаходимо кут B, враховуючи, що проти більшої сторони трикутника лежить більший кут (якщо $a > b$, то кут B гострий).

2) За теоремою про суму кутів трикутника $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.

3) За теоремою синусів $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, звідки $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.

Задачу 4 можна розв'язати і в інший спосіб, склавши квадратне рівняння відносно змінної c на підставі теореми косинусів: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Це рівняння може мати один або два корені чи не мати жодного. Тому задача 4 залежно від значень a, b і $\angle A$ може мати один або два розв'язки чи не мати жодного.

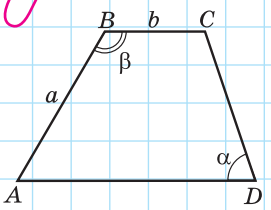
Звернемо увагу, що задачі 1–3 завжди мають не більш ніж один розв'язок. Подумайте, як це пов'язане з ознаками рівності трикутників.

Домовимося під час розв'язування трикутників округляти довжини сторін до сотих, а градусні міри кутів — до одиниць.

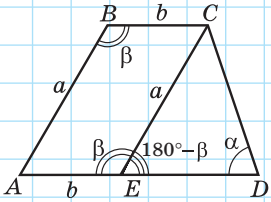
4.2. *Застосування розв'язування трикутників у задачах*

Щойно розглянуті задачі на розв'язування трикутників часто є окремими фрагментами складніших геометричних задач. У цих випадках варто дотримуватись такого плану.

1. Визначити елемент даної фігури (відрізок або кут), який необхідно знайти.
2. Виділити на рисунку допоміжний трикутник, який містить шуканий елемент і може бути розв'язаний за наявними даними задачі.
   Якщо на рисунку такого трикутника немає, його можна отримати, провівши додаткові побудови. Іноді для пошуку необхідного відрізка або кута треба послідовно розв'язати декілька допоміжних трикутників зі спільними елементами.
3. Розв'язавши допоміжний трикутник (або трикутники), знайти шуканий елемент і використати його для подальшого розв'язування початкової задачі.



а



б

Рис. 12

Задача

За даними рис. 12, *а* знайдіть середню лінію трапеції *ABCD*.

Розв'язання

Нехай у трапеції *ABCD* $AD \parallel BC$, $AB = a$, $BC = b$, $\angle B = \beta$, $\angle D = \alpha$ (рис. 12, *а*). Знайдемо середню лінію трапеції.

Проведемо через вершину *C* пряму, паралельну стороні *AB*. Нехай вона перетинає основу *AD* в точці *E* (рис. 12, *б*). Тоді *ABCE* — паралелограм, $CE = AB = a$, $AE = BC = b$, $\angle AEC = \angle B = \beta$. Звідси в трикутнику *ECD* $\angle CED = 180° - \beta$ як суміжний із кутом β паралелограма. Із трикутника *ECD* за теоремою синусів $\frac{EC}{\sin D} = \frac{ED}{\sin \angle ECD}$, тобто $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{ED}{\sin(\beta - \alpha)}$.

Звідси $ED = \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$. Тоді у даній трапеції $AD = b + \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$. Оскільки середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ, то вона має довжину $\frac{1}{2}\left(b + b + \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}\right)$, тобто $b + \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha}$.

Відповідь: $b + \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha}$.

Зауважимо, що цю задачу можна розв'язати і без застосування теореми синусів, провівши висоти трапеції з вершин B і C. Спробуйте самостійно розв'язати задачу цим способом і зробити висновок про те, який зі способів є зручнішим.

Розв'язування трикутників широко застосовується на практиці, зокрема під час проведення вимірювань на місцевості. Нехай, наприклад, необхідно виміряти відстань від точки A до певної недосяжної точки B (рис. 13). Оберемо на місцевості точку C, прохід від якої до точки A можливий, і виміряємо відстань AC. Потім за допомогою спеціальних приладів для вимірювання кутів на місцевості визначимо градусні міри кутів BAC і BCA. Отже, нехай $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Ці дані дозволяють знайти шукану відстань AB (див. задачу 1, п. 4.1).

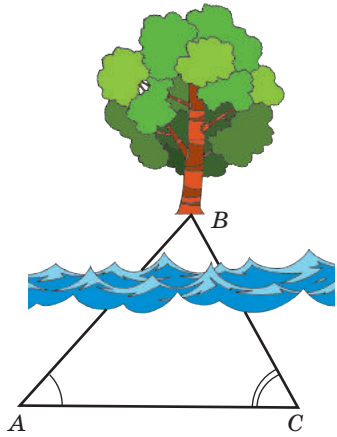


Рис. 13

За теоремою про суму кутів трикутника

$$\angle B = 180^\circ - (\alpha + \gamma);$$

за теоремою синусів $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$, тобто

$$\frac{b}{\sin(180^\circ - (\alpha+\gamma))} = \frac{AB}{\sin\gamma},$$

звідки $AB = \frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

Запитання і задачі

Усні вправи

87. За якою теоремою можна знайти невідому сторону трикутника, у якому задано:

а) дві сторони й кут між ними;
б) дві сторони й кут, протилежний одній із них;
в) сторону й прилеглі до неї кути?

88. Чи можна знайти:

а) кути трикутника, в якому задано три сторони;
б) сторони трикутника, в якому задано три кути?

89. Скільки розв'язків може мати задача на розв'язування трикутника:

а) за трьома сторонами;
б) за двома сторонами й кутом, протилежним одній із них;
в) за стороною та двома кутами?

Графічні вправи

90. Накресліть трикутник ABC, у якому $\angle A = 20°$, $\angle B = 100°$, $\angle C = 60°$. Знайдіть на стороні AC точку C_1 таку, щоб трикутники ABC і ABC_1 були двома розв'язками задачі на розв'язування трикутника за двома сторонами й кутом 20°, протилежним одній із них. Сполучіть точки B і C_1 та виміряйте кут AC_1B.

91. Накресліть трикутник зі стороною 4 см і прилеглими до неї кутами 45° і 60°. Обчисліть довжини сторін трикутника, протилежних заданим кутам. Перевірте отримані результати вимірюванням.

Письмові вправи

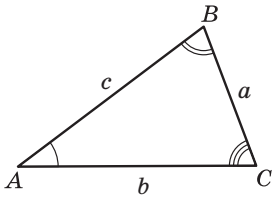
Рівень А

92. Розв'яжіть рівнобедрений трикутник за основою 6 см і кутом при основі 15°.

93. Розв'яжіть трикутник за стороною 10 см і прилеглими до неї кутами 30° і 60°.

94. Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11) за стороною та двома кутами:

а) $a = 10$, $\beta = 45°$, $\gamma = 30°$;
б) $b = 6$, $\alpha = 100°$, $\beta = 50°$.

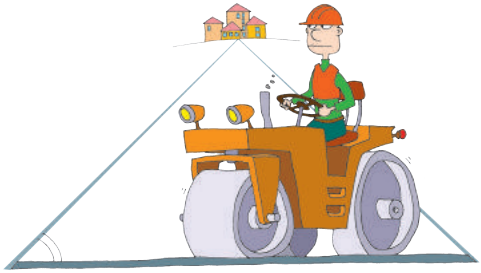


[Рис. 11]

95. Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11) за двома сторонами й кутом між ними:

а) $a = 5,\ b = 21,\ \gamma = 60°$; б) $b = 7,\ c = 8,\ \alpha = 120°$.

96. Дороги між селищами Липове, Веселе і Семенівка вирішили заасфальтувати. Відстань між Липовим і Веселим дорівнює 1 км, між Веселим і Семенівкою — 4,2 км, а відрізок дороги між Липовим і Семенівкою видно з Веселого під кутом 60°. Бригада ремонтників асфальтує за день 0,5 км дороги. Чи встигнуть ремонтники впоратися до приїзду комісії, якщо роботи розпочато 21 червня, а комісія приїздить 7 липня?



97. Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11), якщо:

а) $a = 12,\ \alpha = 40°,\ \beta = 64°$; б) $a = 5\sqrt{2},\ b = 7,\ \gamma = 135°$.

98. Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11) за трьома сторонами:

а) $a = 3\sqrt{3},\ b = 2,\ c = 7$; б) $a = 8,\ b = 15,\ c = 17$.

99. Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11) за двома сторонами й кутом, протилежним одній із них:

а) $a = 12,\ b = 5,\ \alpha = 120°$;
б) $b = 2,\ c = 10,\ \beta = 6°$;
в) $a = 1,\ c = 2,\ \alpha = 45°$.

100. Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11), якщо:

а) $a = 5,\ b = 21,\ c = 19$; б) $a = 6,\ b = 8,\ \alpha = 22°$.

Рівень Б

101. Розв'яжіть трикутник* (див. рис. 11), якщо:

а) $c = 3,\ \gamma = 30°,\ h_b = 2$; б) $a = 17,\ b = 5\sqrt{2},\ h_a = 5$.

102. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 2$ см, AD — бісектриса. Розв'яжіть трикутник ABD.

103. Який вид (за величиною кутів) може мати трикутник ABC, якщо:

а) $BC = 8$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 60°$;
б) $BC = 8$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 60°$;
в) $BC = 8$ см, $AC = 9$ см, $\angle A = 60°$.

* Тут і далі медіану, бісектрису й висоту трикутника, проведені до сторони a, позначатимемо m_a, l_a і h_a відповідно.

104. За даними рис. 14 знайдіть AD.

105. За даними рис. 15 знайдіть $\sin D$.

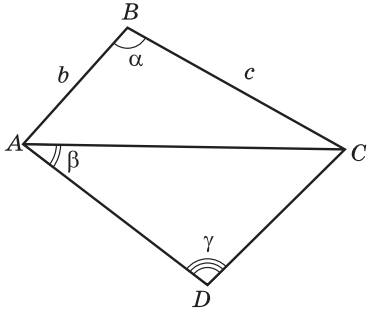


Рис. 14

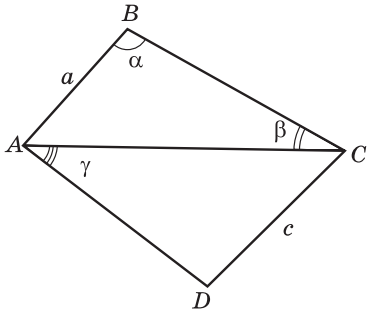


Рис. 15

106. На горі, схил якої знижується під кутом α до горизонту, росте дерево (рис. 16). Його тінь завдовжки l падає вниз по схилу при куті сонця над горизонтом β. Знайдіть висоту дерева.

107. Вершину пагорба з точки A видно під кутом α, а в разі наближення до пагорба на відстань a — під кутом β (рис. 17). Знайдіть висоту пагорба.

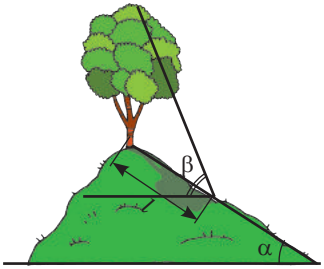


Рис. 16

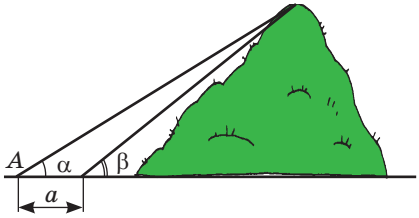


Рис. 17

108. Спостережна вежа заввишки 100 м розташована на горі (рис. 18). Об'єкт спостереження A видно з вершини вежі під кутом 60°, а від основи вежі — під кутом 30° до горизонту. Знайдіть висоту гори.

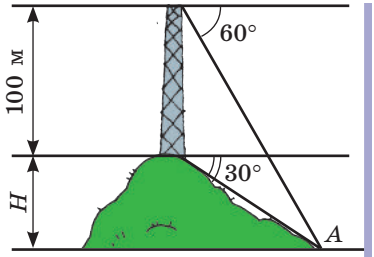


Рис. 18

109. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 10 см, а менша основа дорівнює бічній стороні. Знайдіть периметр трапеції, якщо один із її кутів дорівнює 110°. Відповідь округліть до сантиметрів.

110. Більша основа й бічні сторони рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см, а діагональ трапеції утворює з основою кут 50°. Знайдіть середню лінію трапеції.

Рівень В

111. Дослідіть залежність кількості розв'язків задачі розв'язування трикутника за двома сторонами a і b та кутом α, протилежним одній із них, від значень a, b і α.

112. Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11), якщо:

а) $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $a + b = 24{,}14$;

б) $b = 9$, $c = 19$, $m_a = 11$.

113. Знайдіть сторони трикутника (див. рис. 11), якщо:

а) $\alpha = 47°$, $\beta = 120°$, $a - c = 11$;

б) $m_a = 12$, $m_b = 15$, $m_c = 9$.

114. За даними рис. 19 знайдіть сторони трикутника AOB.

115. Сторони a і b трикутника утворюють кут 120°. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини цього кута.

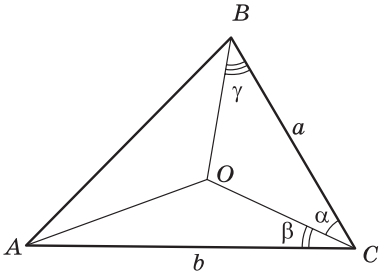


Рис. 19

Повторення перед вивченням § 5

Теоретичний матеріал

- площа паралелограма; 8 клас, п. 16.1
- площа трикутника; 8 клас, п. 17.1
- вписане й описане кола трикутника. 7 клас, § 23

Задачі

116. Дві сторони трикутника дорівнюють 10 см і 12 см, а кут між ними 30°. Знайдіть площу трикутника.

117. Знайдіть площу паралелограма з висотами $6\sqrt{2}$ см і 8 см та гострим кутом 45°.

§ 5 Застосування тригонометричних функцій до знаходження площ

5.1. Площі трикутника і чотирикутника

Досі у формулах площ многокутників використовувалися лише довжини їхніх лінійних елементів (сторін, висот, діагоналей). Тригонометричні функції дозволяють залучити для знаходження площі многокутника величини його кутів.

Теорема (формула обчислення площі трикутника за двома сторонами й кутом між ними)

Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторін на синус кута між ними:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

де a і b — сторони трикутника, γ — кут між ними.

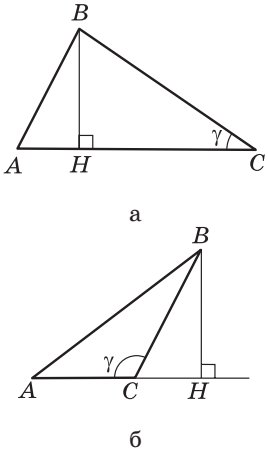


Рис. 20. До доведення формули площі трикутника

Доведення

□ Нехай у трикутнику ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle C = \gamma$. Проведемо висоту BH. За відомою формулою площі трикутника $S = \frac{1}{2} AC \cdot BH$. Однак із прямокутного трикутника BCH ($\angle H = 90°$) маємо $BH = BC \sin \angle BCH$. При цьому у випадку, коли кут γ гострий (рис. 20, *а*), $\angle BCH = \gamma$, а коли кут γ тупий (рис. 20, *б*), $\angle BCH = 180° - \gamma$, $\sin \angle BCH = \sin(180° - \gamma) = \sin \gamma$. Отже, $BH = BC \sin \gamma$. Тоді

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

Випадок, коли кут γ прямий, розгляньте самостійно. ■

Наслідок

Площа паралелограма дорівнює добутку його сторін на синус кута між ними:

$$S = ab \sin \gamma,$$

де a і b — сторони паралелограма, γ — кут між ними.

Задача

Знайдіть найменшу сторону трикутника, площа якого дорівнює $8\sqrt{3}$ см², найбільша сторона — 8 см, а один із кутів — 30°.

Розв'язання

Нехай дано трикутник ABC, $AC = 8$ см, $S_{ABC} = 8\sqrt{3}$ см² (рис. 21). Із теореми про суму кутів трикутника випливає, що кут 30° не може бути найбільшим кутом, отже, він не є протилежним даній стороні.

Нехай $\angle A = 30°$. За формулою площі трикутника $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$, тобто $8\sqrt{3} = \frac{1}{2} AB \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$, звідки $AB = 4\sqrt{3}$ (см).

За теоремою косинусів $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$, $BC^2 = 48 + 64 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, звідки $BC = 4$ (см).

Отже, BC — найменша сторона даного трикутника.

Відповідь: 4 см.

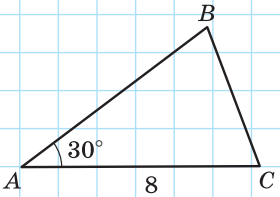


Рис. 21

Формула площі трикутника застосовується і для доведення формули площі чотирикутника із заданими діагоналями й кутом між ними.

Опорна задача
(формула площі чотирикутника)

Площа опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку діагоналей на синус кута між ними:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \gamma,$$

де d_1, d_2 — діагоналі чотирикутника, γ — кут між ними.

Доведіть.

Розв'язання

Нехай діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O під кутом γ (рис. 22). Площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює сумі площ чотирьох трикутників:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin \gamma, \quad S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin (180° - \gamma),$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \gamma, \quad S_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin (180° - \gamma).$$

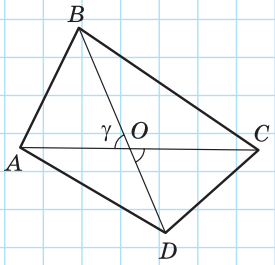


Рис. 22. До доведення формули площі чотирикутника

Враховуючи, що $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$, маємо:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sin\gamma\left(BO\cdot(AO+OC)+OD\cdot(AO+OC)\right) = \frac{1}{2}\sin\gamma\cdot AC\cdot BD = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma.$$

Наслідок

Площа прямокутника обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2}d^2\sin\gamma$, де d — діагональ прямокутника, γ — кут між діагоналями. Зокрема, площа квадрата з діагоналлю d обчислюється за формулою $S = \frac{d^2}{2}$.

Нагадаємо також, що площа ромба з діагоналями d_1 і d_2 обчислюється за формулою $S = \frac{d_1d_2}{2}$.

5.2. Формула Герона

Ще одна формула площі трикутника, для доведення якої можна використати тригонометричні функції, була запропонована давньогрецьким математиком Героном Александрійським (прибл. I ст. до н. е.) і отримала його ім'я. Тільки у XX ст. з'ясувалося, що раніше за Герона цю формулу винайшов Архімед.

Теорема (формула Герона)

Площа трикутника обчислюється за формулою

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де a, b, c — сторони трикутника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — його півпериметр.

Дано: a, b, c — сторони трикутника.

Довести: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Доведення

□ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$; $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ (за наслідком з теореми косинусів).

З основної тригонометричної тотожності маємо:

$$\sin^2\gamma = 1-\cos^2\gamma = (1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) = \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

Оскільки $p=\frac{a+b+c}{2}$, то $a+b+c=2p$, $c-a+b=2p-2a$, $c+a-b=2p-2b$, $a+b-c=2p-2c$. Тоді $\sin^2\gamma = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2b^2}$, $\sin\gamma = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ab}$.

Підставивши одержаний вираз у формулу $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, отримаємо: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, що й треба було довести. ■

Задача

Знайдіть найбільшу висоту трикутника зі сторонами завдовжки 12, 39 і 45.

Розв'язання

Оскільки найбільша висота трикутника перпендикулярна до його найменшої сторони, знайдемо висоту, проведену до сторони $a=12$. Скористаємось методом площ. За формулою Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. У нашому випадку $p=\frac{12+39+45}{2}=48$, $S=\sqrt{48(48-12)(48-39)(48-45)}=216$.

З іншого боку, $S=\frac{1}{2}ah_a$, тобто $216=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot h_a$, звідки $h_a=36$.

Відповідь: 36.

5.3. Формули радіусів вписаного й описаного кіл трикутника

Теорема (формули радіусів вписаного й описаного кіл трикутника)

Радіуси вписаного й описаного кіл трикутника обчислюються за формулами

$$r=\frac{S}{p}=\frac{2S}{a+b+c},\quad R=\frac{abc}{4S},$$

де r — радіус вписаного кола, R — радіус описаного кола, S — площа трикутника, a, b, c — сторони трикутника, $p=\frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр.

Доведення

□ Доведемо спочатку формулу для обчислення r. Нехай у трикутнику ABC зі сторонами $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ точка O — центр

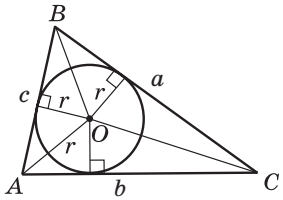


Рис. 23. До доведення формули радіуса вписаного кола

вписаного кола (рис. 23). Тоді площа цього трикутника дорівнює сумі площ трикутників BOC, AOC і AOB:

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r=pr.$$

Звідси $r=\frac{S}{p}=\frac{2S}{a+b+c}$.

Щоб довести формулу для R, скористаємось повним формулюванням теореми синусів, згідно з яким $\frac{a}{\sin A}=2R$, звідки $R=\frac{a}{2\sin A}$. Оскільки $S=\frac{1}{2}bc\sin A$, то $\sin A=\frac{2S}{bc}$. Підставивши цей вираз у формулу для R, маємо: $R=\frac{abc}{4S}$. Теорему доведено. ■

Нагадаємо:

1) для прямокутного трикутника з катетами a і b та гіпотенузою c часто застосовують раніше отримані формули $r=\frac{a+b-c}{2}$ і $R=\frac{c}{2}$;
2) центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину бісектрис трикутника; центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника;
3) для обчислення радіуса описаного кола в трикутнику зі стороною a і протилежним кутом α можна скористатися формулою $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$.

Задача

Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см, а проведена до неї висота — 32 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

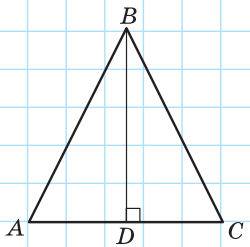


Рис. 24

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC $AB=BC$, $AC=48$ см, $BD=32$ см — висота (рис. 24). Оскільки висота BD є також медіаною трикутника ABC, то $AD=DC=24$ см. Із трикутника ABD ($\angle D=90°$) за теоремою Піфагора $AB=\sqrt{24^2+32^2}=40$ (см).

За формулою радіуса описаного кола

$$R=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S}=\frac{AB^2\cdot AC}{4\cdot 0{,}5AC\cdot BD}=\frac{AB^2}{2BD},\quad R=\frac{40^2}{2\cdot 32}=25 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 25 см.

Зазначимо, що цю задачу можна розв'язати і без застосування формули радіуса описаного кола. Але такий спосіб може виявитися більш складним, особливо тоді, коли він потребує обґрунтування розміщення центра описаного кола в даному трикутнику.

Запитання і задачі

Усні вправи

118. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 6 см. Чи може площа цього трикутника дорівнювати 10 см^2; 15 см^2; 30 см^2?

119. Серед усіх паралелограмів із заданими сторонами a і b визначте той, площа якого є найбільшою. Відповідь обґрунтуйте.

120. Два трикутники описані навколо одного кола. Відомо, що периметр першого трикутника менший, ніж периметр другого. Який із цих трикутників має більшу площу?

Графічні вправи

121. Накресліть паралелограм із кутом 30° і виміряйте довжини його сторін.

а) Обчисліть площу побудованого паралелограма.

б) Накресліть прямокутник, сторони якого дорівнюють сторонам побудованого паралелограма. У скільки разів площа прямокутника більша за площу паралелограма?

122. Накресліть гострокутний трикутник, площа якого дорівнює 12 см^2. Накресліть тупокутний трикутник, рівновеликий побудованому гострокутному, так, щоб побудовані трикутники мали спільну сторону.

Письмові вправи

Рівень А

123. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо:

а) $AB = 10$, $BC = 12$, $\angle B = 30°$;

б) $AB = AC = 6$, $\angle A = 120°$;

в) $AC = 5\sqrt{2}$, $BC = 8$, $\angle A = 100°$, $\angle B = 35°$.

124. Знайдіть площу:

а) прямокутного трикутника з катетом $6\sqrt{3}$ см і прилеглим кутом 60°;

б) паралелограма зі сторонами 4 см і $4\sqrt{3}$ см та кутом 60°;

в) прямокутника з діагоналлю 12 см і кутом між діагоналями 30°.

125. Знайдіть площу:

а) рівнобедреного трикутника з бічною стороною 10 см і кутом при основі 75°;

б) ромба з периметром $16\sqrt{2}$ см і кутом 135°;

в) квадрата з діагоналлю 6 см.

126. Площа трикутника ABC дорівнює 20 см^2. Знайдіть сторону BC, якщо $AC = 5\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$.

127. Знайдіть кути паралелограма зі сторонами 3 см і 12 см, якщо його площа дорівнює 18 см^2.

128. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 30°. Знайдіть бічну сторону трикутника, якщо його площа дорівнює 36 м^2.

129. Знайдіть площу трикутника зі сторонами:

а) 13, 14 і 15;

б) 15, 26 і 37;

в) 8, 29 і 35;

г) 17, 25 і 26.

130. Сторони паралелограма дорівнюють 25 см і 29 см, а одна з діагоналей — 36 см. Знайдіть площу паралелограма.

131. Знайдіть площу трикутника зі сторонами 5, 5 і 6 двома способами.

132. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл:

а) рівнобедреного трикутника з основою 12 см, якщо медіана, проведена до основи, дорівнює 8 см;

б) трикутника зі сторонами 7 см, 15 см і 20 см.

133. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника зі сторонами 16, 25 і 39.

Рівень Б

134. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо:

а) $\angle A = \alpha$, а висоти, проведені з вершин B і C, відповідно дорівнюють h_b і h_c;

б) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а висота, проведена з вершини B, дорівнює h_b.

135. Знайдіть площу:

а) рівнобедреного трикутника з основою $8\sqrt{3}$ см, найменший зовнішній кут якого дорівнює 60°;

б) паралелограма з кутом 30°, якщо бісектриса цього кута ділить сторону на відрізки завдовжки 11 см і 5 см починаючи від вершини протилежного кута;

в) прямокутника, діагональ якого дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут 75°.

136. Знайдіть площу:

а) ромба з периметром 80 см і відношенням кутів 1 : 5;

б) трикутника зі сторонами $6\sqrt{3}$ см, 4 см і 14 см.

137. Знайдіть периметр трикутника з площею $6\sqrt{3}$ см^2 і кутом 60°, якщо сторони, прилеглі до даного кута, відносяться як 3 : 8.

138. Площа прямокутника з діагоналлю 6 см дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

139. Чи може в формулі Герона хоча б одна з різниць $p-a$, $p-b$ або $p-c$ бути від'ємною? Відповідь обґрунтуйте.

140. Знайдіть найбільшу висоту і радіус вписаного кола для трикутника зі сторонами:

а) 4, 13 і 15; б) 9, 10 і 17; в) 16, 25 і 39.

141. Знайдіть найменшу висоту і радіус описаного кола для трикутника зі сторонами:

а) 10, 17 і 21; б) 20, 34 і 42.

142 (опорна). Площа описаного многокутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола. Доведіть.

143. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 64 см, а бічна сторона відноситься до основи як 5 : 6. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника.

144. Висота трикутника дорівнює 12 см і ділить його сторону на відрізки завдовжки 5 см і 9 см. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника.

Рівень В

145. Основи трапеції дорівнюють 3 см і 11 см, а діагоналі — 13 см і 15 см. Знайдіть площу трапеції.

146. Паралельні сторони трапеції дорівнюють 2 см і 6 см, а непаралельні — 13 см і 15 см. Знайдіть площу трапеції.

147. Точка дотику вписаного кола ділить бічну сторону рівнобічної трапеції на відрізки завдовжки 9 см і 16 см. Знайдіть радіус кола і площу трапеції.

148. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції, у якій бічна сторона дорівнює 40 см, основа — 13 см, а діагональ — 51 см.

Повторення перед вивченням § 6

Теоретичний матеріал

- теорема Фалеса; середні лінії трикутника і трапеції; 8 клас, § 6
- теорема Піфагора. 8 клас, § 13

Задачі

149. У мотузковому містечку дві точки маршруту, що розташовані на висоті 5,6 м і 2 м, з'єднані прямим містком. Знайдіть відстань від середини цього містка до землі.

150. Відрізки $AA_1 = 10$ см і $BB_1 = 28$ см — відстані від точок A і B до прямої l (точки A і B лежать по один бік від прямої). Знайдіть відстань між точками A і B, якщо $A_1B_1 = 24$ см.

Онлайн-тестування для підготовки до контрольної роботи № 1

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 1

1. У трикутнику ABC $AB = 8$ м, $BC = 15$ м, $\angle B = 60°$. Знайдіть периметр і площу трикутника.

2. У трикутнику DEF $DE = 4$ см, $\angle D = 30°$, $\angle E = 120°$. Знайдіть невідомі сторони трикутника і радіус кола, описаного навколо нього.

3. Дано трикутник зі сторонами 13, 20 і 21.

а) Доведіть, що даний трикутник гострокутний.

б) Знайдіть площу трикутника.

в) Знайдіть найменшу висоту трикутника.

4. Сторони паралелограма дорівнюють $8\sqrt{2}$ см і 2 см та утворюють кут 45°. Знайдіть меншу діагональ і площу паралелограма.

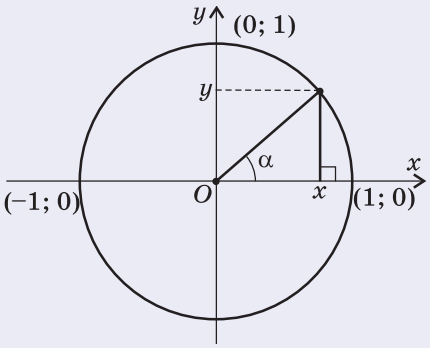
5. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а проведена до неї висота — 16 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

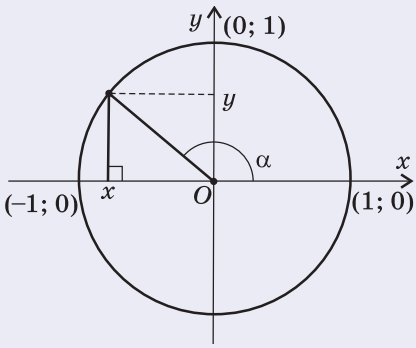
6. Діагональ, бічна сторона і більша основа рівнобічної трапеції дорівнюють відповідно 40 см, 13 см і 51 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

Підсумки

ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ І

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ





$\sin\alpha = y$
$\cos\alpha = x$
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$
$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ І ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

Тригонометричні тотожності

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\alpha \neq 90°)$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 180°)$

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 (\alpha \neq 0°, \alpha \neq 90°, \alpha \neq 180°)$

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha \neq 90°)$

$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 180°)$

Формули зведення

Для $0° \text{ J } \alpha \text{ J } 90°$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

Для $0° < \alpha < 90°$

$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Для $0° \text{ J } \alpha \text{ J } 180°$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

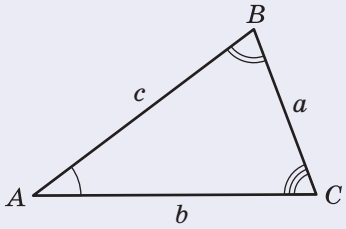
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ $(\alpha \neq 90°)$

$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

$(\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 180°)$

ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ ТА НАСЛІДКИ З НЕЇ



Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Наслідок 1

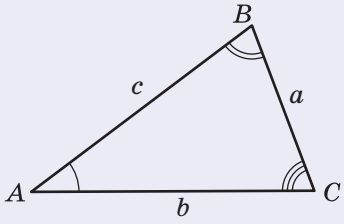
У трикутнику ABC зі сторонами a, b, c і кутом C між сторонами a і b

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Наслідок 2

Якщо в трикутнику зі сторонами a, b, c справджується нерівність $a^2 + b^2 > c^2$, то кут C гострий; якщо $a^2 + b^2 < c^2$, то кут C тупий; якщо $a^2 + b^2 = c^2$, то кут C прямий

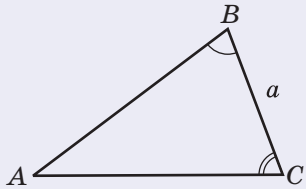
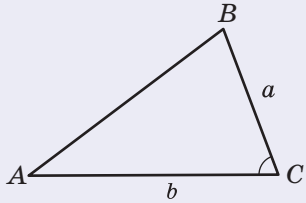
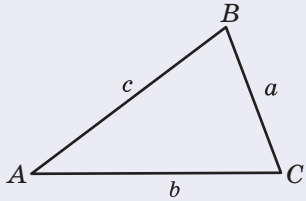
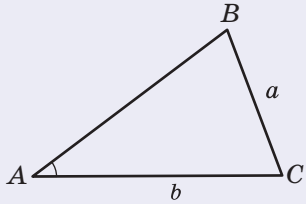
ТЕОРЕМА СИНУСІВ



Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів:

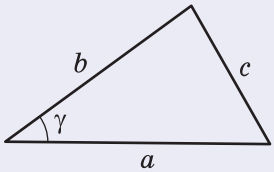
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

де R — радіус кола, описаного навколо трикутника

ОСНОВНІ ЗАДАЧІ НА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ		
Задача	***Умова***	***Схема розв'язування***
Задача 1 За стороною та двома кутами	Дано: a, $\angle B$, $\angle C$. Знайти: b, c, $\angle A$  	1. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$. 2. $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$
Задача 2 За двома сторонами й кутом між ними	Дано: a, b, $\angle C$. Знайти: c, $\angle A$, $\angle B$  	1. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$. 2. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. 3. $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$
Задача 3 За трьома сторонами	Дано: a, b, c. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$  	1. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. 2. $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. 3. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$
Задача 4 За двома сторонами й кутом, протилежним одній із них	Дано: a, b, $\angle A$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$  	1. $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$. 2. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. 3. $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$

ФОРМУЛИ ПЛОЩ

Площа трикутника



$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

де a і b — сторони трикутника, γ — кут між ними

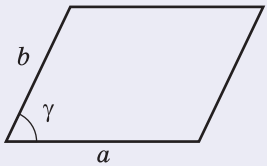
Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де a, b, c — сторони трикутника,

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — півпериметр

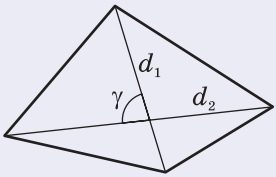
Площа паралелограма



$$S = ab\sin\gamma,$$

де a і b — сторони паралелограма, γ — кут між ними

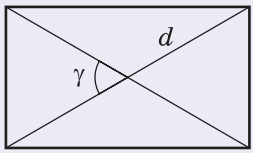
Площа опуклого чотирикутника



$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma, \ ,$$

де d_1, d_2 — діагоналі чотирикутника, γ — кут між ними

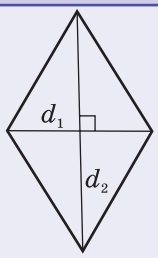
Площа прямокутника



$$S = \frac{d^2}{2}\sin\gamma,$$

де d — діагональ прямокутника, γ — кут між діагоналями

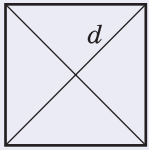
ФОРМУЛИ ПЛОЩ



Площа ромба

$$S = \frac{d_1 d_2}{2},$$

де d_1 і d_1 — діагоналі ромба

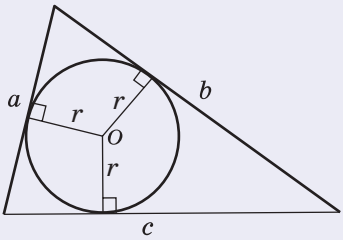


Площа квадрата

$$S = \frac{d^2}{2},$$

де d — діагональ квадрата

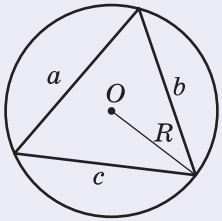
ФОРМУЛИ РАДІУСІВ



Радіус вписаного кола трикутника

$$r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{a+b+c},$$

де S — площа трикутника,
a, b, c — сторони трикутника,
$p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр



Радіус описаного кола трикутника

$$R = \frac{abc}{4S},$$

де S — площа трикутника,
a, b, c — сторони трикутника

Контрольні запитання до розділу I

1. Дайте означення синуса, косинуса й тангенса кутів від 0° до 180°.
2. Запишіть формули зведення для кутів $(90° - \alpha)$ і $(180° - \alpha)$.
3. Сформулюйте теорему косинусів.
4. Сформулюйте наслідки з теореми косинусів.
5. Сформулюйте теорему синусів.
6. Опишіть основні алгоритми розв'язування трикутників.
7. Запишіть формули площі довільного трикутника.
8. Запишіть формули площі довільного паралелограма.
9. Запишіть формули радіусів вписаного й описаного кіл трикутника.

Додаткові задачі до розділу I

151. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а медіана, проведена до бічної сторони, дорівнює 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

152. Знайдіть діагоналі паралелограма, площа якого дорівнює $14\sqrt{3}$ м^2, а сторони — 4 м і 7 м.

153. Точка D лежить на основі AC рівнобедреного трикутника ABC. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників ABD і DBC, рівні.

154.* Доведіть теорему синусів методом площ.

155. Доведіть за допомогою теореми синусів теорему про властивість бісектриси трикутника.

156. Розв'яжіть трикутник ABC, якщо $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R.

157 (опорна). Якщо два трикутники мають по рівному куту, то відношення площ цих трикутників дорівнює відношенню добутків сторін, що утворюють рівні кути. Доведіть.

158. Знайдіть площу трикутника, в якому бісектриса кута, що дорівнює 120°, ділить протилежну сторону на відрізки завдовжки 21 см і 35 см.

159. Дві сторони трикутника дорівнюють $8\sqrt{2}$ см і 7 см, а його площа — 28 см^2. Знайдіть третю сторону.

160. До якої з вершин різностороннього трикутника центр вписаного кола є найближчим? Відповідь обґрунтуйте.

161. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 192 см^2, а радіус вписаного кола — 6 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його основа на 4 см більша за бічну сторону.

162. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 22 см і 42 см, а бічна сторона — 26 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

Задачі підвищеної складності

163. Медіани AN і BM трикутника ABC перетинаються в точці O, причому $AN = 6$, $BM = 9$, $\angle AOB = 30°$. Знайдіть площу трикутника ABC.

164. У трикутнику ABC $\angle A = 75°$, $AB = 1$, $AC = \sqrt{6}$. На стороні BC позначено точку M так, що $\angle BAM = 30°$. Пряма AM перетинає коло, описане навколо трикутника ABC, в точці N, яка не збігається з точкою A. Знайдіть AN.

165 (опорна). Довжина бісектриси трикутника обчислюється за формулою $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$, де l_a — бісектриса, проведена до сторони a, α — кут між сторонами b і c. Доведіть.

166. У трикутнику зі стороною 26 см медіани, проведені до двох інших сторін, дорівнюють 15 см і 30 см. Знайдіть довжину третьої медіани.

167. Сторони опуклого чотирикутника з площею S дорівнюють a, b, c і d. Доведіть, що S J $\frac{1}{2}(ab+cd)$.

168. Доведіть формулу площі вписаного чотирикутника (формулу Брахмагупти) $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, де a, b, c і d — сторони чотирикутника, p — його півпериметр.

169. Доведіть, що для висот трикутника h_a, h_b і h_c та радіуса вписаного кола r справджується співвідношення $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

170. Центр вписаного в прямокутний трикутник кола віддалений від кінців гіпотенузи на 7 см і $5\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус вписаного кола.

171. Довжини двох сторін трикутника дорівнюють a і b. Бісектриси кутів при третій стороні в результаті перетину утворюють кут 165°. Знайдіть площу трикутника.

172. У трапеції з основами a і b $(a < b)$ діагоналі взаємно перпендикулярні, а кут між продовженнями бічних сторін дорівнює 45°. Знайдіть висоту трапеції.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

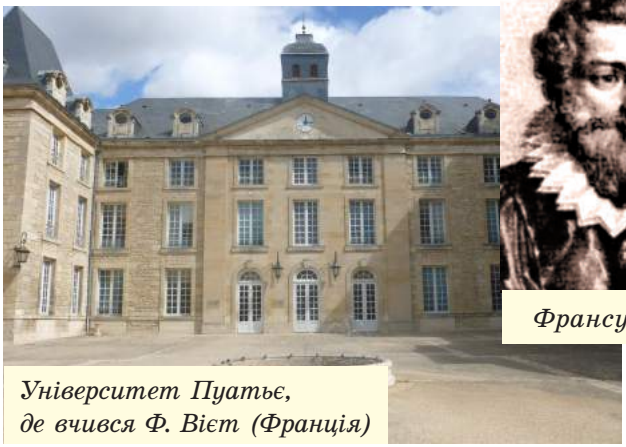
Приблизно до XVII ст. тригонометрія як розділ геометрії вивчала майже виключно одне питання — розв'язування трикутників. І це не дивно, адже потреби архітектури й астрономії, геодезії і мореплавання висували проблему пошуку невідомих сторін і кутів трикутника на чільне місце в процесі розв'язування практичних задач.

Гімназія (палестра) в Олімпії (Давня Греція)

Теорему косинусів фактично було доведено вже в другій книзі «Начал» Евкліда, де узагальнюється теорема Піфагора і наводяться формули для обчислення квадрата сторони довільного трикутника. Математики Александрії, Давньої Індії, країн Близького та Середнього Сходу також використовували подібні формули. Однак уперше чітке формулювання теореми косинусів навів у 1579 р. французький математик Франсуа Вієт (1540–1603). Сучасного вигляду ця теорема набула в 1801 р. в роботі іншого французького вченого — Лазара Карно (1753–1823).

Значно пізніше за теорему косинусів було винайдено теорему синусів. Річ у тім, що математики давнини зводили розв'язування довільних трикутників до розв'язування прямокутних трикутників, тому теорема синусів їм не була потрібна. Цю теорему довів лише в XI ст. астроном із Хорезма Аль-Беруні. Починаючи з XVI ст. теорему синусів використовують і європейські геометри, а в 1801 р. французький математик Ж. Л. Лагранж (1736–1813) вивів її з теореми косинусів.

Розкопки Мохенджо-Даро (Давня Індія)



Університет Пуатьє, де вчився Ф. Вієт (Франція)

Франсуа Вієт

Ж. Л. Лагранж

Цікавою є історія виникнення формули Герона. Про життя й діяльність Герона Александрійського відомо вкрай мало — навіть роки його життя достеменно не встановлено (одні історики вважають, що він жив у III ст. до н. е., а інші — в I ст. до н. е.). Герон досяг визначних результатів у прикладних науках — геодезії та механіці (його навіть називали Герон-механік). Він виклав правила вимірювання земельних ділянок і описав деякі вимірювальні прилади, зокрема «діоптри» — прилади для побудови й вимірювання кутів на місцевості. У своєму найважливішому геометричному творі «Метрика» Герон навів доведення формули площі трикутника, нині відомої як формула Герона. Але пізніше з'ясувалося, що першим цю формулу в III ст. до н. е. вивів славнозвісний Архімед.

Герон

Римській амфітеатр (Александрія, Єгипет)

Математичні олімпіади

Українські математичні олімпіади школярів

Для учнів, які захоплюються математикою і завжди прагнуть проявити себе в розв'язуванні нестандартних задач, матеріалів будь-якого підручника буде замало. Тому вже понад 130 років у світі проводяться різноманітні математичні змагання. Найбільш поширеними з них є математичні олімпіади школярів.

У 1884 році в Києві почав виходити «Журнал елементарної математики», в якому школярам пропонувалися задачі для самостійного розв'язання. Це була фактично перша заочна математична олімпіада на теренах України.

У 1935 році вперше було проведено очну міську олімпіаду з математики в Києві. Її фундатором став професор, дійсний член Всеукраїнської академії наук Михайло Пилипович Кравчук. У 1936 році у Київській міській олімпіаді взяли участь також учні з інших міст України. Серед переможців був харківський школяр, майбутній академік Олексій Погорєлов. Після того як у 1938 році М. П. Кравчука було репресовано, організацією учнівських олімпіад активно опікувався майбутній академік, а в ті часи професор Київського університету М. М. Боголюбов. У післявоєнні роки за його ініціативою проведення математичних олімпіад у Києві відновилось. Цікаво, що у 1950 році друге місце в Київській міській олімпіаді посів запрошений до участі в ній учень ніжинської школи Михайло Ядренко, у майбутньому видатний учений і педагог. З 1961 року стали проводитися традиційні щорічні Всеукраїнські олімпіади юних математиків. У них беруть участь талановиті школярі з усіх куточків України. У 1968 році Михайло Йосипович Ядренко, який у той час уже очолював кафедру Київського університету, заснував періодичне видання «У світі математики», а починаючи з 1970 року він понад 30 років був головою журі Всеукраїнських учнівських олімпіад.

Задачі цих олімпіад завжди були надзвичайно цікавим джерелом нестандартних математичних ідей для школярів. Зокрема, традиційно пропонується багато олімпіадних завдань з геометрії. Рівень складності задач на Всеукраїнських математичних олімпіадах від їх започаткування і до сьогодення значно зріс. Але кожен із вас може спробувати отримати насолоду знайти своє, оригінальне розв'язання олімпіадної задачі.

Розглянемо, наприклад, задачу I Всеукраїнської олімпіади з математики. **У даний рівносторонній трикутник вписати рівносторонній трикутник найменшої площі.** Розглянемо декілька розв'язань цієї задачі, заснованих на методах і формулах розділу, який ви щойно опанували.

1-й спосіб. Нехай дано рівносторонній трикутник ABC зі стороною a і вписаний у нього рівносторонній трикутник DEF (рис. 25). Очевидно, що трикутники ADF, BED і CFE є рівними (доведіть це самостійно). Площа трикутника DEF буде дорівнювати різниці площі трикутника ABC і площ цих трикутників. Нехай $AD = x$, тоді $S_{DEF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 3\cdot\left(\frac{1}{2}x(a-x)\sin 60^\circ\right)$. Отже, S_{DEF} буде найменшою, коли значення виразу $x(a-x)$ буде найбільшим. А оскільки $x(a-x) = -\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$, то добуток $x(a-x)$ набуде найбільшого значення, якщо $x = \frac{a}{2}$. Звідси шуканим є трикутник, утворений середніми лініями трикутника ABC (рис. 26).

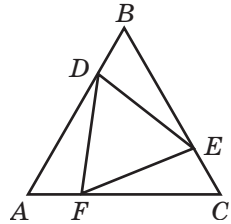


Рис. 25

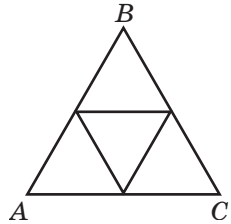


Рис. 26

2-й спосіб. Розглянемо правильний трикутник DEF, вписаний у правильний трикутник ABC (рис. 25). Оскільки $S_{DEF} = \frac{DE^2\sqrt{3}}{4}$, то площа трикутника DEF буде найменшою, коли сторона DE буде найменшою. За теоремою косинусів з трикутника BED маємо: $DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2BD\cdot BE\cdot\cos 60^\circ$. З рівності трикутників ADF і BED маємо рівність відрізків: $AD = BE$, отже, $DE^2 = BD^2 + AD^2 - BD\cdot AD = (BD-AD)^2 + BD\cdot AD =$

$$= (BD-AD)^2 + \frac{1}{4}\left((BD+AD)^2 - (BD-AD)^2\right) = \frac{3}{4}(BD-AD)^2 + \frac{1}{4}AB^2.$$

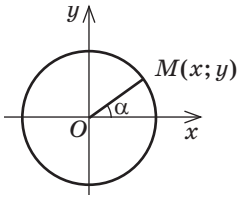
Оскільки AB^2 є величиною сталою, то довжина відрізка DE буде найменшою за умови $BD = AD = \frac{AB}{2}$. Отже, шуканим є трикутник, утворений середніми лініями трикутника ABC (рис. 26).

Поверніться до розв'язання цієї задачі після опанування методів наступних розділів підручника та спробуйте розв'язати її в інший спосіб.

Готуємось до ДПА

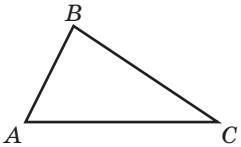
Тест 1

Виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.



1. На тригонометричному колі точка $M(x;y)$ відповідає куту α (див. рисунок). Укажіть функцію кута α, значення якої дорівнює y.

А $\sin\alpha$ **Б** $\cos\alpha$ **В** $\mathrm{tg}\,\alpha$ **Г** $\mathrm{ctg}\,\alpha$



2. Серед наведених співвідношень між сторонами та кутами трикутника ABC (див. рисунок) укажіть правильне.

А $\dfrac{AB}{\cos C}=\dfrac{BC}{\cos A}$ **В** $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\sin B$

Б $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$ **Г** $BC^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$

3. Визначте вид кута α $(0°<\alpha\leqslant 180°)$, якщо $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha=0$.

А Гострий **Б** Прямий **В** Тупий **Г** Розгорнутий

4. Спростіть вираз $1-\sin(180°-\alpha)\sin\alpha$.

А $1+\sin^2\alpha$ **Б** $1-\cos\alpha\sin\alpha$ **В** $\cos^2\alpha$ **Г** $\sin^2\alpha$

5. Знайдіть радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з бічною стороною 5 см і основою 8 см.

А $1\frac{1}{3}$ см **Б** $2\frac{2}{3}$ см **В** 3 см **Г** 2,5 см

6. Сторона трикутника, вписаного в коло, у $\sqrt{3}$ рази більша за радіус кола. Знайдіть кут трикутника, протилежний даній стороні.

А 30° **Б** 60° **В** 120° **Г** 60° або 120°.

7. Одна зі сторін трикутника менша за його півпериметр на 2 см, друга — на 4 см, третя — на 3 см. Знайдіть площу трикутника.

А 252 см^2 **В** 126 см^2

Б 84 см^2 **Г** Визначити неможливо

Відеоматеріали за розділом I